Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи.

1. Корни трехчлена. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня, один из которых лежит внутри отрезка [0; 1], а другой – вне этого отрезка. Определите знак $f(b)$.

Фольклор

Ответ: $f(b) < 0$.

Решение. График данного трехчлена – парабола, ветви которой направлены вверх.

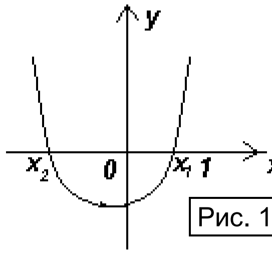


Рис. 1а

<u>Первый способ</u>. Заметим, что $f(b) = b^2 + ab + b = b(a + b + 1) = f(0)\cdot f(1)$. Из непрерывности квадратного трехчлена и из условия задачи следует, что числа $f(0)$ и $f(1)$ имеют разные знаки (см. рис. 1а, б). Следовательно, $f(b) < 0$.

<u>Второй способ</u>. Пусть $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \notin [0; 1]$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = b$, значит, $x_2 = \dfrac{b}{x_1}$. Тогда $|x_2| > |b|$. Учитывая, что $x_1 > 0$, рассмотрим два случая:

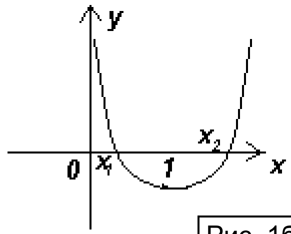


Рис. 1б

1) Если $x_2 < 0$, то $b = x_1 \cdot x_2 < 0$ и $x_2 < b$. Следовательно, $b \in (x_2; x_1)$, то есть $f(b) < 0$ (см. рис. 1а).
2) Если $x_2 > 1$, то $b = x_1 \cdot x_2 > x_1$ и $x_2 > b$. Следовательно, $b \in (x_1; x_2)$, то есть $f(b) < 0$ (см. рис. 1б).

<u>Критерии проверки</u>.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное рассуждение, основанное на том, что корень может совпадать с концом данного отрезка – 8 баллов

При решении вторым способом рассмотрен только один случай – 5 баллов

Приведен только верный ответ – 1 балл

2. Ломаная. В окна комнаты светит солнце, а в комнате неподвижно висит в воздухе четырёхзвенная замкнутая ломаная. Её тень на стене имеет форму параллелограмма. Через некоторое время тень передвинулась, но по-прежнему осталась параллелограммом. Докажите, что и сама ломаная – параллелограмм. (*Считаем, что солнечные лучи параллельны друг другу*.)

Фольклор

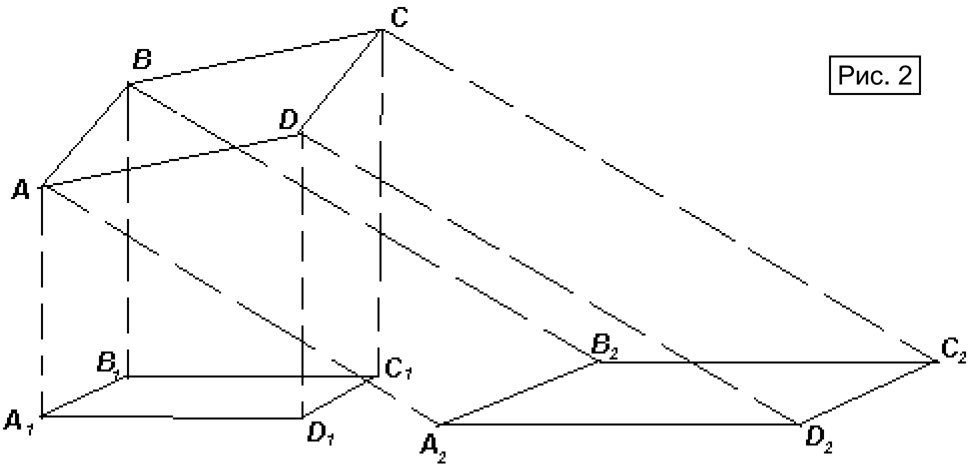


Рис. 2

Решение. Пусть $ABCD$ – данная ломаная, а $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ – её тени (см. рис. 2). Тогда $AA_1 \parallel BB_1$, поэтому точки A, B, A_1 и B_1 лежат в одной плоскости. Аналогично, точки C, D, C_1 и D_1 также лежат в одной плоскости. Более того, эти плоскости параллельны, так как пересекаются плоскостью стены по параллельным прямым A_1B_1 и C_1D_1 (две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости). Таким же рассуждением получим, что параллельны плоскости ABB_2A_2 и CDD_2C_2.

Заметим, что если $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha_1 \parallel \beta_1$, $\alpha \cap \alpha_1 = a$, $\beta \cap \beta_1 = b$, то $a \parallel b$. Действительно, в этом случае $a \parallel \beta$ и $a \parallel \beta_1$, поэтому проведя плоскость γ через прямую a и точку $B \in b$

получим, что γ пересекает β и β_1 по прямым, содержащим точку *B* и параллельным прямой *a*. Но такая прямая – единственная, а именно, это прямая *b*.

Воспользовавшись этим утверждением, получим, что $AB \parallel CD$. Аналогично доказывается параллельность *BC* и *AD*, то есть $ABCD$ – параллелограмм.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности – 7-9 баллов

Доказано только, что плоскости, содержащие AB и CD, параллельны прямой проектирования – 4 балла

Этот же факт указан, но не обоснован, и решение не завершено – 2 балла

Доказана только параллельность плоскостей – 2 балла

3. Натуральное число $n > 1$ таково, что десятичная запись числа $9997 \cdot n$ содержит только нечетные цифры. Найдите наименьшее возможное значение *n*.

Олимпиада р. Казахстан 2010, 11 класс

Ответ: 3335.

Решение. Из условия следует, что последняя цифра числа *n* должна быть нечетной. Преобразуем: $9997n = (10000 - 3)n = 10000n - 3n$. Последняя цифра перед четырьмя нулями в конце числа $10000n$ нечетная, и если $3n < 10000$, то при вычитании эта цифра уменьшится на 1, и получится четная цифра. Значит, $3n \geq 10000$, то есть $n > 3333$. Наименьшее нечетное значение *n*, удовлетворяющее этому неравенству, это $n = 3335$.

Проверим: $9997 \cdot 3335 = 33339995$ – удовлетворяет условию задачи.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности – 7-9 баллов

Оценка получена верно, но пример не приведен – 5 баллов

Приведен только верный пример – 2 балла

Приведен только верный ответ – 1 балл

4. Платок. Постиран квадратный платок площади 1 $м^2$. Для просушки его вешают на веревку так, чтобы центр платка был на веревке. За час успевают высохнуть только те части платка, которые не перекрывают друг друга. Какова наибольшая суммарная площадь этих частей?

Е. Ермакова

Ответ: $3 - 2\sqrt{2}$.

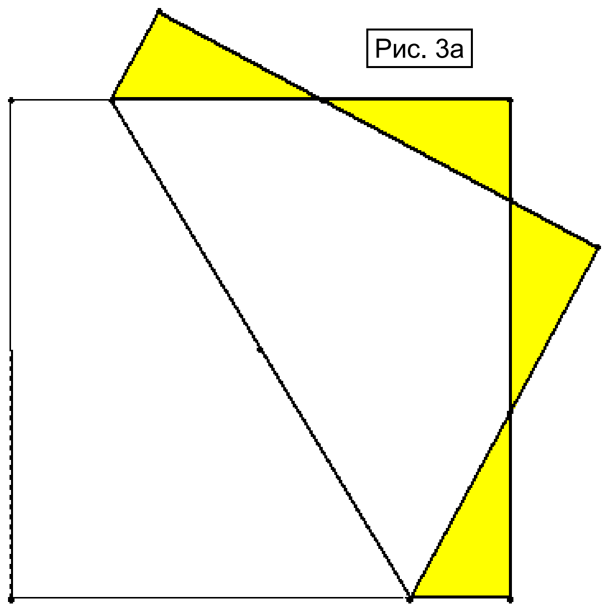


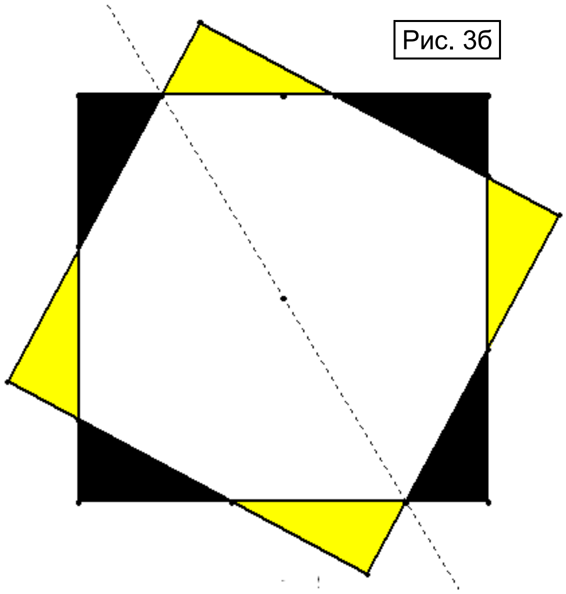
Рис. 3а

Решение. Сформулируем условие задачи на языке геометрии. Через центр квадрата со стороной 1 метр проведена прямая, не совпадающая с его осью симметрии. Одна из получившихся частей квадрата отражена относительно этой прямой (см. рис. 3а). Каково наибольшее значение суммы площадей прямоугольных треугольников, выделенных цветом?

Докажем, что эти четыре треугольника равны между собой. Для этого, рассмотрим квадрат, симметричный данному относительно той же прямой (см. рис. 3б).

Разноцветные треугольники разбиваются на пары, симметричные относительно оси, а соседние треугольники одного цвета получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг общего центра двух квадратов (так как при таком повороте каждый квадрат переходит в себя). Таким образом, все восемь прямоугольных треугольников, выделенных на рисунке 3б, равны друг другу. Кроме того, из этих рассуждений следует, что периметр каждого треугольника равен стороне квадрата.

Рис. 3б

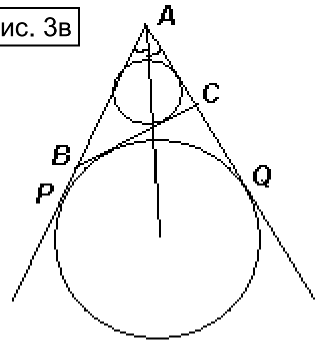


Далее можно рассуждать по разному.

<u>Первый способ</u> («геометрический»). Рассмотрим один из прямоугольных треугольников. Докажем, что из всех треугольников с данным углом и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный.

Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = pr$ (p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности). Поэтому она будет наибольшей, если r принимает наибольшее значение. Пусть в треугольнике ABC фиксирован угол A, тогда рассмотрим его вписанную окружность и вневписанную окружность, касающуюся стороны BC и продолжений двух других сторон в точках P и Q (см. рис. 3в). Так как $AP = AQ = p$, то положение вневписанной окружности не зависит от положения касательной BC. Кроме того, радиусы окружностей, вписанных в угол BAC увеличиваются по мере удаления центра от вершины A. Значит, из всех окружностей, вписанных в треугольники ABC наибольший радиус будет у той, которая касается вневписанной. А это достигается, если $AB = AC$.

Рис. 3в



Отметим, что в нашем случае, фиксированный угол равен 90°, а вневписанная окружность – это окружность, вписанная в квадрат.

Таким образом, сумма S площадей четырех треугольников, выделенных на рис. 3а, равна $2x^2$, где x – длина катета равнобедренного прямоугольного треугольника.

Значение x можно найти, например, из уравнения $x + x\sqrt{2} + x = 1$, тогда $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S = 3 - 2\sqrt{2}$.

<u>Второй способ</u> («аналитический»). Пусть длины катетов одного из прямоугольных треугольников равны x и y, тогда искомая площадь: $S = 2xy$. Так как $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ (см. рис. 3б), то $y = \frac{2x-1}{2x-2}$. Тогда $S(x) = 2x \cdot \frac{2x-1}{2x-2} = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$, где $x \in (0;\ 1)$. Найдем наибольшее значение этой функции на этом промежутке. $S'(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}$; критические точки функции: $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Интервалу (0; 1) принадлежит только одна из них: $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. При «переходе» через эту точку знак производной меняется с «+» на «–», поэтому это – точка максимума. В силу непрерывности функции на интервале (0; 1) и единственности точки максимума, в этой точке функция принимает наибольшее значение: $S(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 1 + \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Аналитическое рассуждение можно провести и не используя производную. Пусть $\frac{x+y}{2}=m$, *тогда* $x = m - n$, $y = m + n$, $S = 2(m^2 - n^2)$. *Из уравнения* $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=1$ *получим связь между* m *и* n: $2m+\sqrt{2m^2+2n^2}=1$. *Из этого равенства видно, что чем меньше по модулю значение* n, *тем больше значение* m. *С другой стороны при уменьшении по модулю* n *и увеличении* m *значение* $S = 2(m^2 - n^2)$ *возрастает. Следовательно, наибольшее значение достигается, если* $n = 0$, *то есть, если* $x = y$.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности – 8-9 баллов

Приведено верное, в целом, рассуждение, но допущена вычислительная ошибка в заключительной части – 7 баллов

При геометрическом способе решения использовано, но не доказано утверждение о наибольшей площади треугольника с данным периметром и углом – 7 баллов

Равенство треугольников строго не доказано, но присутствует идея или план такого рассуждения, после чего приведены верные аналитические рассуждения и получен верный ответ – 5 баллов

Равенство треугольников никак не обосновано, далее проведены верные аналитические рассуждения, использующие это равенство, и получен верный ответ – 3 балла

Равенство треугольников доказано, но не обоснована их равнобедренность, и получен верный ответ – 3 балла

Задача не решена, но есть начальные «продвижения» – 1 балл

Приведен только верный ответ – 1 балл

5. Многочлен. Пусть $f(x)$ – такой многочлен степени n, что для всех $k = 0, 1, 2, ..., n$ $f(k) = \frac{1}{k+1}$ Найдите $f(n + 1)$.

Фольклор

Ответ: $\frac{(-1)^n+1}{n+2}$.

Решение. Рассмотрим $P(x) = (x + 1)f(x) - 1$ (*). Это многочлен степени $n + 1$, имеющий корни 0, 1, 2, … , n (всего корней $n + 1$). Следовательно, $P(x) = Cx(x - 1)(x - 2)\ldots\cdot(x - n)$, где $C\in R$ (**). Из равенства (*) получим, что $P(-1) = -1$, тогда из равенства (**) следует, что $C = \frac{(-1)^n+1}{n+2}$. Таким образом, из (*) $P(n + 1) = (n + 2)f(n + 1) - 1$, а из (**) $P(n + 1) = C(n + 1)n(n - 1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1 = C(n + 1)!$. Приравнивая правые части этих равенств, получим: $f(n+1)=\frac{C(n+1)!+1}{n+2} = \frac{(-1)^n+1}{n+2}$.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности – 8-9 баллов

Верно и обоснованно найден вид многочлена, но константа не определена или определена неверно – 7 баллов

Верный ответ получен путем рассмотрения частных случаев – 2 балла

Приведен только верный ответ – 1 балл

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так и как его скорректировать (если это возможно), чтобы «решение» стало верным. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки, сделав подробные пояснения, а затем приведите верное решение.

6. Система уравнений. «Задача». При каких значениях параметра a система уравнений $x^2 = 1 - y^2 = y - |a|$ имеет единственное решение?

«Ответ»: таких a нет.

«Решение». Рассмотрим уравнение $1 - y^2 = y - |a| \Leftrightarrow y^2 + y - (|a| + 1) = 0$. Так как система имеет единственное решение, то это уравнение также должно иметь единственное решение, то есть $D = 1 + 4(1 + |a|) = 0$. Но последнее равенство не выполняется ни для каких значений a.

В.И. Рыжик «30 000 уроков математики». Книга для учителя. – М.: «Просвещение», 2003)

Комментарий. В условии «задачи» ошибок нет. В приведенном «решении» не учтено, что рассматриваемое квадратное уравнение может иметь и два корня y_1 и y_2, но условие «задачи» может выполняться, если одно из двух уравнений $x^2 = y_1 - |a|$ и $x^2 = y_2 - |a|$ не имеет корней, а другое имеет один корень.

Учитывая это, можно довести «решение» до верного. Действительно, пусть $D > 0$, тогда $y_1 = \frac{-1-\sqrt{D}}{2}$; $y_2 = \frac{-1+\sqrt{D}}{2}$. Заметим, что $y_1 - |a| < 0$, значит, уравнение $x^2 = y_1 - |a|$ корней не имеет. Уравнение $x^2 = y_2 - |a|$ имеет единственный корень, если $x = 0$. В этом случае, $\frac{-1+\sqrt{D}}{2} = |a| \Leftrightarrow \sqrt{4|a|+5} = 2|a|+1 \Leftrightarrow |a| = 1$. <u>Ответ</u>: при $a = \pm 1$.

Возможен и другой способ решения. Заметим, что если $(x_0; y_0)$ является решением системы, то решением является и $(-x_0; y_0)$. Значит, необходимым условием единственности решения системы является $x_0 = 0$. Тогда из уравнения $x^2 = 1 - y^2$ следует, что $y = \pm 1$, а из уравнения $1 - y^2 = y - |a|$, что $y = 1$, $|a| = 1$.

Проверим достаточность полученного условия, так как при $|a| = 1$, у системы могут оказаться и другие решения, кроме (0; 1). Подставив $|a| = 1$ в уравнение $1 - y^2 = y - |a|$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни: $y_1 = 1$; $y_2 = -2$. Тогда $x^2 = 0$ или $x^2 = -3$, то есть $x = 0$. Значит, других решений нет.

<u>Критерии проверки</u>. *Баллы за 1) и 2) суммируются.*

1) *Верно указана и пояснена ошибка, допущенная в «решении» – 5 баллов*

Ошибка в «решении» указана, но не объяснена – 3 балла

Указано только, что получен неверный «ответ» – 1 балл

2) *Приведено полное обоснованное решение – 5 баллов*

Приведено верное, в целом, решение, содержащее некоторые пробелы – 4 балла

При решении вторым способом никак не проверена достаточность полученного условия – 3 балла

Приведено графическое решение системы, но никак не обосновано отсутствие других решений – 2 балла

7. Школьники. «Задача». Десять школьников по окончании 10 класса решили поступать либо на мехмат, либо на физфак. Некоторые школьники дружат между собой. Каждый понедельник с момента окончания 10 класса они созваниваются с друзьями и обсуждают планы. Если большинство друзей некоторого школьника хотят поступать не туда, куда он, то к следующему понедельнику он принимает мнение этого большинства. Докажите, что до окончания школы их мнения устоятся и больше меняться не будут.

«Решение». Всего в этой группе 45 пар школьников, из них n пар друзей, которые собираются поступать в разные места. Пусть Петя собирается на физфак, k его друзей – на мехмат, а l – на физфак, причем $l < k$. После того, как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l. Таким образом, после каждой перемены мнений число n уменьшится на $k - l > 0$ пар. Ясно, что это может происходить не более 45 раз. Значит, за год (52 недели) процесс перемены мнений завершится.

Предложил Р. Алишев (по материалам 2 этапа ВОШ 2014/15 в р. Татарстан)

Комментарий. Утверждение, которое предлагается доказать в условии задачи, неверно. Приведем контрпример. Пусть в этой группе учатся девочки и мальчики. Каждая из девочек дружит с каждым мальчиком, а однополых пар друзей нет. По окончании 10 класса все девочки решили поступать на мехмат, а все мальчики – на физфак. В таком случае мнения всех школьников будут меняться еженедельно и не устоятся никогда.

Условие задачи станет корректным, если к понедельнику будет менять мнение только один школьник; любой из тех, чьи планы отличались от планов большинства друзей. Соответственно станет верным и приведенное решение.

Неверное утверждение «доказано» в результате следующей ошибки. В высказывании «После того, как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l» не учитывается, что вместе с Петей мнение могут переменить и некоторые его друзья. Даже если учитывать только пары с участием Пети, после очередной перемены мнений число n не обязательно уменьшится на $k - l$. А если говорить обо всех парах друзей, то вообще странно ожидать, что изменение числа n зависит только от планов Пети и его друзей.

В исправленном виде задача неоднократно использовалась в различных формулировках. Первоисточником, видимо, является задача А.М. Штейнберга, опубликованная по номером М277 в задачнике «Кванта"»(№8/1974) в такой формулировке:

Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем ее в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

Критерии проверки. *Баллы за 1) – 4) суммируются.*

1) *Указано, что утверждение, сформулированное в условии «задачи», не верно – 2 балла*

2) *Приведен контрпример: для 10 школьников – 3 балла, для меньшего количества школьников – 1 балл*

3) *Указана и пояснена ошибка в «решении» – 3 балла*

4) *Указано, как можно изменить условие «задачи», чтобы «решение» стало верным – 2 балла*

8. Общая точка. *На уроке была предложена следующая задача*: «При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4}$ ровно одну общую точку?». Учительница проверила несколько решений. Все, кто взялся за эту задачу, преобразовали выражение: $\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x^2-4)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)^2} = (x+2)^2$, а далее рассуждали по-разному.

«Решение Вани». Достаточно найти значения k, для которых уравнение $(x + 2)^2 = kx$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2 + (4 - k)x + 4 = 0$. Его дискриминант $D = (4 - k)^2 - 16 = k(k - 8)$ равен нулю при $k = 0$ и $k = 8$. «Ответ»: 0; 8.

«Решение Тани». Составим уравнение касательной к графику функции $y = (x + 2)^2$ в точке $x_0 = 0$. Так как $y(0) = 4$; $y' = 2(x + 2)$; $y'(0) = 4$, то уравнение имеет вид: $y - 4 = 4(x - 0) \Leftrightarrow y = 4x + 4$. Эта прямая не может быть задана уравнением вида $y = kx$.
«Ответ»: таких значений k нет.

«Решение Мани». Изобразим график функции $y = (x + 2)^2$ в декартовой системе координат. Из графика видно, что прямая $y = 0$ является касательной к нему. «Ответ»: 0.

«Решение Ани». Составим уравнение касательной к графику функции $y = (x + 2)^2$ в некоторой точке x_0. Это уравнение имеет вид $y = (2x_0 + 4)(x – x_0) + x_0^2 + 4x_0 + 4$. Подставив в него (0; 0), получим, что $x_0 = \pm 2$. Тогда $y = 0$ и $y = 8x$.
«Ответ»: 0; 8.

Прокомментируйте каждое «решение», указав все ошибки и недочеты (если они есть). Приведите верное решение (если оно отсутствует).

Предложила Е. Гладкова

Комментарий. Общий недостаток всех «решений» – некорректно выполненное преобразование, при котором ученики расширили область определения заданной функции: полученная ими функция $y=(x+2)^2$ определена для любых значений *x*, а исходная функция – при $x \neq 2$.

Наиболее далеко от истины «решение» Тани. Таня понимает, что касательная к графику, как правило, имеет с ним одну общую точку, но без всяких на то оснований считает, что это должна непременно быть касательная с абсциссой точки касания $x_0 = 0$. Ход «решения» и «ответы» Вани и Ани были бы верными, если бы речь шла о функции $y=(x+2)^2$. Но в данной ситуации Ване и Ане прежде всего нужно было проверить, действительно ли найденные ими прямые имеют ровно одну общую точку с графиком исходной функции. Точка с абсциссой $x = 2$ на этом графике выколота, а одна из найденных «касательных» (соответствующая $k = 8$) проходит как раз через эту точку! Таким образом, полученная ими прямая $y = 8x$ решением не является. При этом в решении Ани пропущено значение $x_0 = –2$, что, скорее всего, является опиской, так как далее приведены ответы, соответствующие $x_0 = \pm 2$.

Кроме того, они оба не рассмотрели случай, когда прямая пересекает параболу в двух точках, но одна из них выколота. То, что они из-за этого не потеряли какого-то решения – счастливая случайность.

Таким образом, кроме проверки, указанной выше, Ване достаточно было подставить $x = 2$ в рассмотренное им уравнение и убедиться, что других значений *k*, кроме $k = 8$, не найдется. Аня же могла, например, в явном виде рассмотреть прямую, проходящую через начало координат и точку (2; 4), и получить, что эта прямая имеет уравнение $y = 8x$.

Заметим, что в решении Ани абсциссы точек касания явно вычисляются в ходе решения, а Ване ещё требуется их найти, завершив решение квадратного уравнения.

Если подходить формально, то к недочетам их записей можно также отнести логически неверное использование союза «И» в записях: k = 0 и k = 8 (Ваня); y = 0 и y = 8x (Аня). Союз «И» в таких записях означает, что оба условия выполняются одновременно, а это не соответствует действительности. Уместнее было бы использовать союз «ИЛИ», либо найти другую форму записи (например, через точку с запятой). Отметим также, что «решение» Ани требует знания уравнения касательной (10 класс), а «решение» Вани использует только программный материал 9-го класса.

«Решение» Мани выглядит совершенно неубедительным, однако именно у неё получен верный ответ! Маня, разумеется, не права, когда пишет, что касательная к графику $y=(x+2)^2$, проходящая через начало координат, это только прямая $y=0$. Но утверждение, что из всех прямых вида $y = kx$ только эта прямая имеет единственную общую точку с графиком исходной функции, по счастливой случайностью оказывается верным. Кроме того, вряд ли допустимо (как это делает Маня) в качестве обоснования писать «из графика видно ... ». На наш взгляд, подобное обоснование может быть приемлемым только в тех случаях, когда речь идёт не о вычислении конкретных значений, а о качественном анализе расположения графиков, например, о количестве точек их пересечения, да и то, далеко не всегда.

<u>Критерии проверки</u>. *Баллы за 1) – 4) суммируются.*

1) *Указана общая ошибка всех «решений» (расширение области определения) – 1 балл*
2) *Указана и прокомментирована ошибка в «решении» Тани – 1 балл*

3) *Указаны и прокомментированы ошибки в «решениях» Мани, Вани и Ани – по 2 балла за каждое*
4) *Приведено верное решение – 2 балла*
В приведенном решении не рассмотрен случай, когда искомая прямая не является касательной – 1 балл

9. Алгоритм. *На ЕГЭ по информатике была предложена задача*: «Дана конечная числовая последовательность. Требуется предложить алгоритм поиска двух членов последовательности с наибольшей суммой, причем разность их номеров должна быть не меньше, чем 4.»

Боря, Вася, Гена и Дима предложили такое «решение»: сначала выбрать из этой последовательности несколько самых больших чисел, а затем перебором найти среди них два искомых числа. При этом Боря выбрал 5 наибольших членов последовательности, Вася выбрал 7, Гена – 8, а Дима – 9.

Оцените «решение» каждого мальчика и обоснуйте свою точку зрения.

Предложил В. Гуровиц (по материалам ЕГЭ 2014 по информатике)

Комментарий. Алгоритм, предложенный мальчиками, возможен, но надо выяснить, какое наименьшее количество наибольших членов последовательности надо выбрать. Докажем, что это количество равно восьми.

Действительно, пусть выбрано 7 наибольших чисел и они оказались последовательными членами, причем наибольшее из них – четвертое. Тогда сумма этого числа и какого-то члена последовательности, не вошедшего в выбранные, может оказаться больше, чем сумма двух любых чисел из этой семерки (исключая четвертое), а выбирать ему «в пару» никакое число из отобранных нельзя, так как разность их номеров будет меньше четырех. Например, пусть выбранные числа: 10, 11, 12, 100, 13, 14, 15, идущие в данной последовательности подряд, а среди оставшихся членов последовательности есть число 9.

Пусть выбрано, по крайней мере, 8 наибольших чисел и A – наибольшее из них, а B – какое-то из этих восьми чисел, стоящее в последовательности на расстоянии от A не менее четырех. Такое число B найдётся, так как существует не более шести чисел, находящихся от A на расстоянии, меньшем четырех (три числа перед А и три числа после). Пусть C и D – какие-то два члена последовательности, причём D – не из выбранных восьми. Тогда, так как $A \geq C$, а $B \geq D$, то $A + B \geq C + D$.

Следовательно, чтобы найти пару чисел с максимальной суммой, удовлетворяющую условию, достаточно перебрать пары, образованные восемью наибольшими членами последовательности.

Таким образом, идея «решения» у всех мальчиков – верная, но, реализовав предложенный алгоритм, Гена и Дима наверняка получат верный ответ, а Боря и Вася – не обязательно. При этом понятно, что выбор Димой девяти чисел – избыточен.

Отметим, что если бы условие задачи требовало указать и номера членов, удовлетворяющих условию (а не только сами члены последовательности), то предложенный алгоритм оказался бы неверным. Действительно, тогда он не сможет учесть, что в данной последовательности могут быть повторяющиеся числа. В частности, если заданная последовательность – постоянная, то в ответе, в этом случае, должны были быть указаны все возможные пары номеров, различающиеся не меньше, чем на 4.

<u>Критерии проверки</u>. *Баллы за 1) – 3) суммируются.*
1) *Указано, что предложенный алгоритм принципиально возможен – 1 балл*
2) *Доказано, что предложенный алгоритм работает для восьми чисел, но не работает для меньшего количества чисел – 8 баллов*
Доказано только, что восьми чисел достаточно – 5 баллов
Приведен только пример, показывающий, что семи чисел может не хватить – 3 балла
3) *Верно указано, у кого «решения» верные – 1 балл*

10. Взаимное расположение. *На уроке геометрии обсуждался известный факт*:

«В треугольнике, отличном от равнобедренного, биссектриса лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины». Учитель предложил такое рассуждение:

Пусть в таком треугольнике *ABC AC* > *AB*, тогда представим, что точка *C* движется по прямой *BC*. Когда вершина *C* – «в бесконечности», то «медиана», проведенная из вершины *A*, «параллельна» *BC*, а биссектриса», проведенная из вершины *A*, пересекает *BC*, поэтому она лежит между медианой и высотой. При перемещении точки *C* вдоль прямой *BC* по направлению к точке *B* медиана не может совпасть с высотой, так как в этом случае *AC* должно равняться *AB*. Следовательно, биссектриса по-прежнему будет лежать между медианой и высотой.

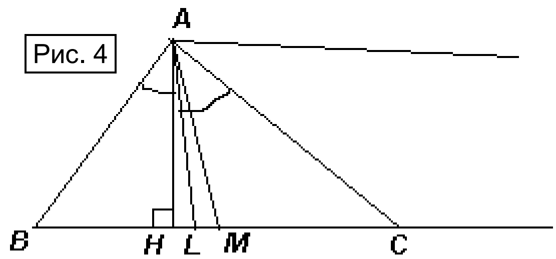
1) Оцените строгость рассуждений, исправьте ошибки и недочеты (если они есть), допишите необходимые подробности.

2) Стали бы Вы использовать такое рассуждение на уроке и почему?

Предложил А. Блинков (использован фрагмент из книги М.И. Башмакова «Математика в кармане «Кенгуру»». Международные олимпиады школьников. – М.: Дрофа, 2010)

Комментарий. 1) Приведенное рассуждение нельзя признать абсолютно неверным, но оно, конечно, изложено весьма не строго и содержит существенные пробелы.

Во-первых, никак не объяснено, почему биссектриса находится между медианой и высотой в тот момент, когда вершина *C* – «в бесконечности» (и высота, и биссектриса пересекают *BC*). Во-вторых, неясно, почему при указанном «движении» точки *C* в какой-то момент медиана и биссектриса не могут «поменяться местами». В-третьих, не объяснено, почему при этом «движении» биссектриса не может оказаться между стороной *AB* и высотой.



Введем обозначения: *AH* – высота, *AL* – биссектриса, *AM* – медиана (см. рис. 4). Первый из указанных пробелов восполнить легко. Достаточно сказать, что угол *BAH* –острый, а если вершина *C* – «в бесконечности», то угол *CAH* – прямой. Следовательно, луч *AL* находится внутри угла *CAH*.

Для того, чтобы восполнить другие два указанных пробела, следует прежде всего сослаться на непрерывность, причем сделать это аккуратно, например, так. Зафиксируем вершины *A* и *B* треугольника и прямую *BC*, тогда будет зафиксировано и положение точки *H*. Рассмотрим две функции: зависимость расстояний *LH* и *MH* от длины отрезка *CH*. Каждая из этих функций непрерывна, так как при малых изменениях длины *CH*, длины *LH* и *MH* изменяются мало.

Если расстояние *CH* очень велико (*C* – «в бесконечности»), то *MH* > *LH* (*это пояснено в исходном тексте*). Предположим, что найдется положение точки *C*, при котором *MH* < *LH*. Тогда, по следствию из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции, найдется и такое положение точки *C*, при котором *MH* = *LH*, то есть эти точки совпадут. Следовательно, совпадут биссектриса и медиана, но это противоречит тому, что *AC* > *AB*. Тем самым доказано, что медиана и биссектриса не могут «поменяться местами».

Наконец, считая точку *H* началом отсчета, а луч *HC* задающим положительное направление, и предположив, что точка *L* лежит между *A* и *H*, получим, что *LH* (в зависимости от длины *CH*) принимает как положительные, так и отрицательные значения. Тогда, в силу непрерывности, найдется и такое положение точки *C*, при котором *LH* = 0, то есть точки *L* и *H* совпадут, что опять же противоречит тому, что *AC* > *AB*.

Отметим, что для восполнения этого пробела можно использовать и геометрические соображения, например: $\cos\angle BAH = \frac{AH}{AB} > \frac{AH}{AC} = \cos\angle CAH$, значит, $\angle BAH < \angle CAH$, поэтому точка *L* лежит на луче *HC*. Но в этом случае, гораздо проще сравнить затем отрезки *BL* и *BM* в произвольном треугольнике, используя свойство биссектрисы, и тогда непрерывность вообще не нужна!

2) Использовать такое рассуждение на уроке геометрии, на наш взгляд, не стоит. Прежде всего потому, что «доведение» его до относительно строгого требует от школьников хорошего понимания непрерывности и умения формализовать рассуждения с ней связанные. Доказываемое утверждение рассматривается, как правило в 8 или 9 классе, где мало кто из школьников обладает требуемыми знаниями и умениями. Поверхностное же восприятие таких рассуждений может спровоцировать школьников на использование аналогичных рассуждений там, где они будут приводить к неверным выводам. Кроме того, геометрическое доказательство рассматриваемого факта является весьма несложным и доступным.

Если и обсуждать со школьниками приведенное рассуждение, то на уроке по теме «Непрерывность» в курсе «Алгебры и начал анализа» или на внеклассных занятиях, причем делать это имеет смысл только в том случае, когда школьники достаточно подготовлены и обладают сравнительно высокой математической культурой, позволяющей самостоятельно восполнить пробелы, указанные выше.

Критерии проверки. *Баллы за 1) – 4) суммируются*.

1) *Верно перечислены пробелы в рассуждениях – по 1 баллу за каждый указанный пробел*

2) *Указано, что должна быть ссылка на непрерывность – 1 балл*

3) *Объяснено, каким образом можно восполнить указанные пробелы – по 1 баллу за каждое объяснение*

4) *Приведен разумный комментарий о возможности использования данного рассуждения – 1-3 балла*