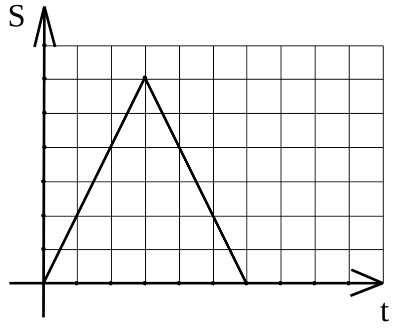
XIII Творческий конкурс учителей математики
Условия, решения, комментарии и критерии проверки
Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи.

1. Мистер Твистер прогуливался с собакой и бросал ей палку на фиксированное расстояние. Сначала он бросил палку по ходу своего движения. После того, как собака принесла ему палку, он остановился, закурил и бросил палку второй раз. Известно, что за палкой собака бежит в два раза быстрее, чем с палкой в зубах. На графике изображена зависимость расстояния от времени между Твистером и собакой за то время, когда он шел (с постоянной скоростью). Изобразите аналогичную зависимость за период времени, когда он стоял и курил, и поясните свое решение.



Д. Шноль

Ответ: см. рис. 1.

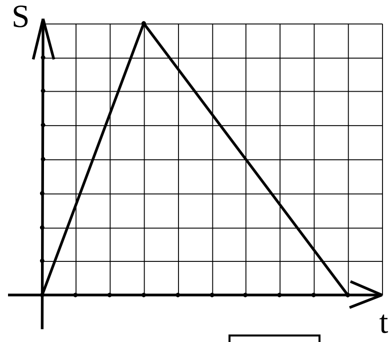


Рис. 1

Решение. Пусть скорость Твистера равна x, а скорость собаки с палкой в зубах равна y. Тогда скорость собаки, когда она бежит за палкой, равна $2y$. В то время, когда собака бежит за палкой, а Твистер идет, она удаляется от него со скоростью $2y – x$, а на обратном пути приближается к нему со скоростью $x + y$. Из графика в условии следует, что время, за которое собака добежала до палки, равно времени, за которое она вернулась к хозяину. Рассматриваемые расстояния также одинаковы, поэтому равны и скорости, то есть $2y – x = x + y$, откуда $y = 2x$. Значит, в первом случае скорости удаления и сближения были равны $3x$.

В случае, когда Твистер стоял, скорость удаления собаки была равна $4x$, а скорость приближения – $2x$. При этом время, за которое собака добежала до палки, не изменилось. Следовательно, расстояние от Твистера до палки в момент, когда палку подобрала собака, было в $\frac{4}{3}$ раза больше аналогичного расстояния в первом случае. Время, за которое собака вернулась с палкой в зубах, было в 2 раза больше времени, потраченного на первую часть пути. По этим данным получим требуемый график.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведен только верный ответ – 5 баллов
Обосновано получено соотношение y = 2x, но дальнейших продвижений нет – 2 балла
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

2. Решите уравнение: $(12x – 1)(6x – 1)(4x – 1)(3x – 1) = 7$.

Фольклор

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{57}}{24}$.

Решение. Перемножив крайние и средние скобки по отдельности, получим: $(36x^2 – 15x + 1)(24x^2 – 10x + 1) = 7$. Пусть $12x^2 – 5x = t$, тогда уравнение примет вид: $(3t + 1)(2t + 1) = 7 \Leftrightarrow 6t^2 + 5t – 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ или $t = -\frac{3}{2}$. Следовательно, $36x^2 – 15x – 2 = 0$ или $24x^2 – 10x + 3 = 0$. Первое из этих уравнений имеет корни $x = \frac{5\pm\sqrt{57}}{24}$, а второе уравнение действительных корней не имеет.

Возможны вариации этого способа решения путем предварительного вынесения коэффициентов при x за скобки.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное решение, но ответ дан в виде сократимой дроби – 9 баллов

Верно указана замена переменных, сводящая данное уравнение к совокупности квадратных уравнений, но допущена одна вычислительная ошибка – 3 балла

Задача не решена или в решении допущено более одной вычислительной ошибки – 0 баллов

3. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность с центром *O*, лежащим внутри четырёхугольника. Сумма углов *AOB* и *COD* равна 180°. Из точки *O* опущены перпендикуляры на каждую сторону четырёхугольника. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров равна полупериметру *ABCD*.

Фольклор

Решение. Рассмотрим перпендикуляры *OK* и *OM* на стороны *AB* и *CD* соответственно (см. рис. 3 а, б). Они являются медианами и биссектрисами в равнобедренных треугольниках *AOB* и *COD* соответственно.

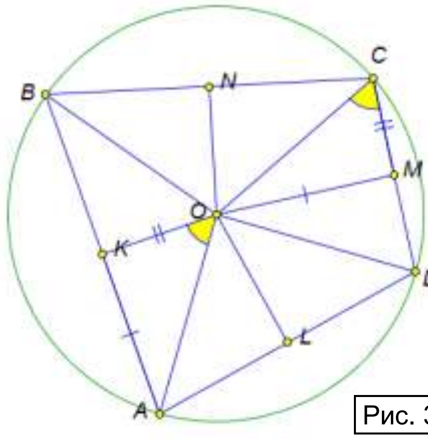


Рис. 3а

Первый способ. Так как $\angle AOB + \angle COD = 180°$, то $\angle KOA + \angle COM = 90°$, значит, $\angle KOA = \angle OCM$ (см. рис. 3а). Следовательно, прямоугольные треугольники *KOA* и *MCO* равны (по гипотенузе и острому углу). Тогда $OM = AK = \frac{1}{2}AB$ и $OK = CM = \frac{1}{2}CD$.

Так как сумма углов *BOC* и *AOD* также равна 180°, то для перпендикуляров к сторонам *BC* и *AD* аналогично получим: $ON = \frac{1}{2}AD$ и $OL = \frac{1}{2}BC$. Таким образом, $OM + ON + OK + OL = \frac{1}{2}P_{ABCD}$, что и требовалось.

Второй способ. Повернём треугольник *COD* вокруг центра *O* на угол *BOC*. Образами точек *C*, *D* и *M* будут являться точки *B*, *D*' и *M*' соответственно (см. рис. 3б). Так как $\angle AOB + \angle COD = \angle AOB + \angle BOD' = 180°$, то *AD*' – диаметр окружности. Тогда *OK* и *OM*' – средние линии прямоугольного треугольника *ABD*', поэтому $OK + OM = OK + OM' = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

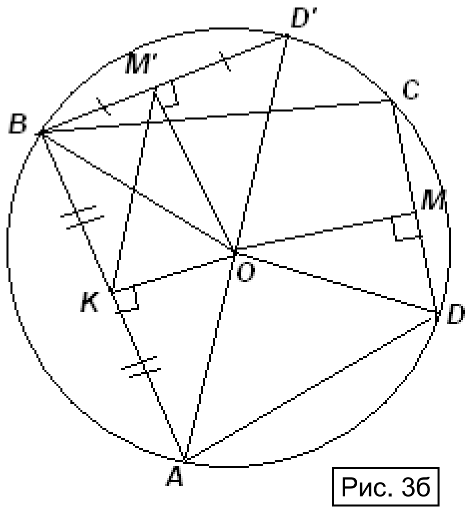


Рис. 3б

Дальнейшее рассуждение приведено в первом способе.

Можно также использовать тригонометрические соотношения в прямоугольных треугольниках.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Верный в целом ход рассуждений, но пропущены некоторые обоснования – 8 баллов

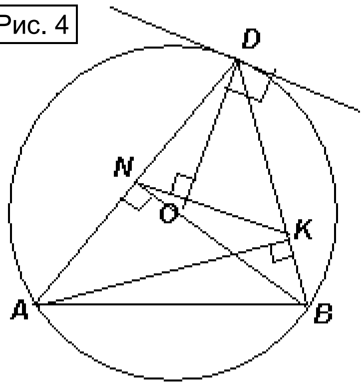
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

4. Тетраэдр. В боковых гранях тетраэдра провели по две высоты из вершин при основании тетраэдра. Затем в плоскостях боковых граней провели прямые, соединяющие основания этих высот. Докажите, что полученные три прямые параллельны одной плоскости.

И. Шарыгин

Решение. Пусть ABC – основание тетраэдра с вершиной D. Опишем сферу около тетраэдра $DABC$, тогда каждая боковая грань будет вписана в окружность. Рассмотрим одну из боковых граней, например, DAB, в которой проведены высоты AK и BN (см. рис. 4). Тогда прямая KN перпендикулярна радиусу окружности, поэтому она параллельна касательной к этой окружности, проведенной в точке D. Но касательная к сечению сферы одновременно является и касательной прямой к самой сфере.

Рис. 4



Проведя аналогичные рассуждения для двух других боковых граней, получим, что три прямые из условия задачи соответственно параллельны касательным прямым к сфере, проведенным через точку D. Но эти касательные лежат в плоскости, касательной к сфере и проходящей через точку D, откуда и следует утверждение задачи.

Возможны также разнообразные «счетные» решения, например, использующие векторы.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

5. Задачи для олимпиады. При составлении олимпиады для каждой из параллелей 5 – 11 классов требуется подготовить по 15 задач, при этом у любых двух параллелей может быть не более пяти общих задач. Какое наименьшее количество задач нужно подготовить?

В. Гуровиц

Ответ: 35.

Решение. Составим таблицу, где строки будут соответствовать параллелям, столбцы – задачам, и будем отмечать клетки, если задача вошла в вариант для данной параллели. Отмеченными окажутся $7\cdot 15 = 105$ клеток.

Пусть в такой таблице n столбцов, а в i-ом столбце отмечено k_i клеток. Тогда, по неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим: $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}$.

Обозначив $S = \sum_{i=1}^{n} k_i^2$ и учитывая, что, в нашем случае, $\sum_{i=1}^{n} k_i$ = 105, получим: $S \geq \frac{105^2}{n}$.

Рассмотрим теперь все пары клеток, находящиеся в одном столбце. С одной стороны, их количество $P = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i(k_i-1)}{2} = \frac{S-105}{2} \geq \frac{105^2-105n}{2n}$. С другой стороны, так как каждая из $\frac{7\cdot 6}{2}$ = 21 пары строк дает в эту сумму не более пяти пар клеток, то $P \leq 21\cdot 5 = 105$. Таким образом, $\frac{105^2-105n}{2n} \leq 105$, то есть $n \geq 35$.

Тридцати пяти задач достаточно. Чтобы не приводить пример таблицы с 35 столбцами, можно объединить задачи в блоки по 5 и построить таблицу 7×7, где каждый столбец будет соответствовать блоку из пяти задач. Тогда в каждой строке должно быть 3 отмеченные клетки и какие бы две строки мы не выбрали, у них должен быть ровно один «общий» столбец с отмеченными клетками. Это возможно, см., например, таблицу справа.

	Б1	Б2	Б3	Б4	Б5	Б6	Б7
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведены только верный ответ и верный пример – 3 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок.

6. Тождество. *На уроке в 7 классе было доказано тождество* $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$.

«А вторую скобку можно разложить на множители?» – спросил любопытный Вася. «Нет, нельзя», – ответила учительница. «А почему?» –не унимался Вася.

а) Как бы Вы на месте учительницы объяснили Васе (и другим семиклассникам), почему выражение $a^2 – ab + b^2$ не раскладывается на множители?

б) Приведите другой вариант объяснения, уместный для более старших классов.

Предложил А. Хачатурян

Комментарий. а) На какие множители могло бы разложиться выражение $a^2 – ab + b^2$? Только на линейные, не содержащие свободного члена: $a^2 – ab + b^2= (ma + kb)\cdot(pa + qb)$. Вынесем за скобки m и p и учтём, что $pm = qk = 1$. Тогда $a^2 – ab + b^2= (a + kb)\cdot(a + \frac{1}{k}b)$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Сравнивая коэффициенты при ab в правой и левой частях, получим, что $k + \frac{1}{k} = –1$. Следовательно, $k < 0$.

Если $k < –1$, то $k + \frac{1}{k} < –1 + 0 = –1$. А если $–1 \le k < 0$, то $\frac{1}{k} \le –1$, и снова $k + \frac{1}{k} < –1 + 0 = –1$. Таким образом, равенство $k + \frac{1}{k} = –1$ выполняться не может.

Второй способ. Выделив полный квадрат в левой части равенства, получим: $(a – \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 = (a + kb)\cdot(a + \frac{1}{k}b)$. Так как это равенство должно выполняться при любых значениях a и b, то и значение ноль левая и правая часть должны принимать при одних и тех же значениях этих переменных. Но правая часть обращается в ноль, если $a = –kb$ или $b = –ka$, а левая часть – только при $a = b = 0$ (в остальных случаях ее значение положительно).

Возможны также различные модификации этих рассуждений, в частности, переход к частным случаям. Например, пусть выражение $a^2 – ab + b^2$ можно разложить на множители. Подставив $b = 1$, получим, что выражение $a^2 – a + 1$ также можно разложить на множители. Тогда $a^2 – a + 1=(a – p)(a – q)$. Раскрыв скобки и приравняв соответствующие коэффициенты, получим: $p + q = 1$ и $pq=1$. Тогда $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = 1$, значит, $p^2 + 2 + q^2 = 1$ или $p^2 + q^2= –1$. Противоречие.

б) Так как более старшие классы уже знакомы с квадратными уравнениями, то можно предложить такой способ.

Пусть выражение $a^2 – ab + b^2$ можно разложить на множители. Подставив $b = 1$, получим, что квадратный трёхчлен $a^2 – a + 1$ можно разложить на множители. Тогда квадратное уравнение $a^2 – a + 1 = 0$ равносильно совокупности двух невырожденных линейных уравнений и поэтому имеет корни. Но, на самом деле, корней у него нет, так как его дискриминант отрицателен.

Аналогичное рассуждение можно провести для уравнения $a^2 – ab + b^2$, сделав замену $t = \frac{a}{b}$, где $b \ne 0$.

Отметим, что обоснования, приведенные в пункте а), по сути основаны на том же самом факте. Действительно, уравнение $k + \frac{1}{k} = –1$, полученное в первом способе, *равносильно уравнению $k^2 + k + 1 = 0$, а рассуждения второго способа также связаны с корнями уравнений*.

Критерии проверки. *Баллы за а) и б) суммируются.*

а) Приведено любое полное грамотное объяснение, доступное 7 классу – 5 баллов

Путем выделения полного квадрата объяснено, что выражение $a^2 - ab + b^2$ обращается в ноль только при $a = b = 0$, но не объяснено, почему из этого следует невозможность разложения на множители – 2 балла

б) Приведено более короткое объяснение по сравнению с пунктом а), учитывающее что более старшие знакомы с квадратными уравнениями – 5 баллов

7. Иррациональное число. *Ученик привел Вам следующее доказательство того, что $\sqrt{5}$ – иррациональное число.*

Будем доказывать методом «от противного». Предположим, что $\sqrt{5} = \frac{n}{k}$, где $\frac{n}{k}$ – несократимая дробь. Тогда, возводя обе части в квадрат, получим, что $5k^2 = n^2$, то есть число n^2 делится на k^2. Отсюда $n \cdot n = n^2$ делится на k, причем k взаимно просто с одним из сомножителей (из-за того, что дробь несократима), поэтому другой сомножитель делится на k. Итак, n делится на k, что противоречит предположению о том, что дробь несократима.

Оцените и наиболее полно прокомментируйте это доказательство.

Предложило жюри

Комментарий. Ученик, вероятно, хотел представить классическое доказательство, но упустил некоторые детали. Его «доказательство» заведомо не может быть верным, так как число 5 в нём вообще никак не используется (и учитель может указать ученику на это обстоятельство, если хочет, чтобы тот нашёл ошибку самостоятельно).

Ошибка же содержится в последнем утверждении, так как противоречия, на самом деле, нет: если n делится на k, то дробь $\frac{n}{k}$ вполне может быть несократимой, а именно, если $k = 1$.

Можно также объяснить ученику, что он доказал более слабое утверждение: число $\sqrt{5}$ (и вообще, число $\sqrt{a}$ при натуральном значении a) либо целое, либо иррациональное. Тогда рассуждения ученика можно завершить, доказав, что $\sqrt{5}$ – не целое число. Для этого достаточно проверить, что $\sqrt{5} \neq 1$ и $\sqrt{5} \neq 2$, и указать, что при всех натуральных $k \geq 3$ выполняется неравенство $k^2 \geq 9 > 5$.

Критерии проверки. *Баллы за 1) – 4) суммируются*.

1) Указано, что «доказательство» содержит ошибку – 1 балл

2) Указано, какое именно утверждение неверно и объяснено, почему это так – 5 баллов

3) Объяснена суть ошибки, а именно, что «доказательство» не изменится, если заменить число 5 на любое другое натуральное число – 2 балла

4) Указано, как завершить рассуждение ученика, чтобы они стали верными – 2 балла

В заданиях №8 и №9 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки, сделав подробные пояснения, а затем приведите верное решение.

8. Очередь. «Задача». Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите вероятность того, что А стоит первым, если известно, что Б стоит в очереди позже А.

«Ответ»: 1/3.

«Решение». Б стоит позже А в стольких же случаях, в скольких и А стоит позже Б, то есть, все 24 способа выстроить в ряд 4 человек разбиваются на две равные группы по 12 – в половине А раньше Б, в половине – Б раньше А. Условная вероятность того, что А стоит первым при заданном условии, равна доле тех случаев, когда А – первый среди тех 12 случаев, когда А стоит раньше Б. Но, кроме Б, у нас есть 3 человека – А, В и Г, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью. То есть, доли случаев, когда первый – А, когда первый – В и когда первый – Г, равны, поэтому искомая вероятность равна 1/3.

Предложила Е. Горская

Комментарий. Условие задачи корректно, а «ответ» и «решение» неверны.

В приведенном «решении» первые два предложения верны, а третье – неверно, то есть ошибка начинается с фразы: «Но, кроме Б, у нас есть 3 человека – А, В и Г, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью». Действительно, речь идёт только о случаях, когда А стоит раньше Б, что повышает вероятность того, что А стоит первым.

Для того, чтобы исправить ошибку, внеся в решение минимальные изменения, можно после двух первых предложений написать: «Но у нас есть 4 человека – А, Б, В и Г, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью, то есть А стоит первым в 24 : 4 = 6 случаях, причём во всех этих случаях он стоит раньше Б. Поэтому искомая вероятность равна 6/12 = 1/2.»

Более короткое верное продолжение предложенного решения выглядит так: «Если А – первый, то остальные могут построиться 3! = 6 способами. Поэтому искомая вероятность равна 6/12 = 1/2.»

Приведём также другое возможное решение. Рассмотрим все расстановки пары А и Б, при которых Б стоит позже А. Среди них есть три расстановки, в которых А стоит первым (Б может быть вторым, третьим или четвёртым). Расстановок, где А не первый, тоже три (Если А второй, то Б третий или четвёртый, а если А третий, то Б – только четвёртый). Количество расстановок В и Г на оставшихся местах не зависит от того, о каких именно местах речь, поэтому искомая вероятность равна 3/(3+3) = 1/2.

Отметим, что в данной задаче общее количество случаев расстановки небольшое, их всего 24. Поэтому допустимо и непосредственное выписывание всех 24 расстановок с последующим подсчётом тех, где А стоит первым (их 6), а затем тех, где А стоит раньше Б (их 12). Такое решение нерационально и не обобщается для длинной очереди, но может оказаться наиболее надёжным для с трудом осваивающего предмет учащегося.

<u>Критерии проверки</u>. *Баллы за 1) и 2) суммируются.*

1) Указано, что условие задачи корректно, и верно объяснено, где именно и в чем допущена ошибка в «решении» – 5 баллов.

2) Приведено любое из рациональных верных решений – 5 баллов

9. Параметр. «Задача». При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) такая, что $ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$?

«Ответ»: при любых $a \neq 0$ и $a \neq 2$.

«Решение». Если $a = 0$, то уравнение примет вид: $2y^2 + 4y + 2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любая пара вида $(x; -1)$, поэтому $a = 0$ следует исключить.

Если $a \neq 0$, то уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x: $ax^2 + 2a(2y - 1)x + (3a + 2)y^2 + (4 - 6a)y + 2 = 0$. Условие задачи может быть выполнено только в том случае, когда дискриминант этого уравнения равен нулю. Вычислим его: $D = 4a^2(2y - 1)^2 - 4a((3a + 2)y^2 + (4 - 6a)y + 2)$. $D = 0$, если $a(2y - 1)^2 = (3a + 2)y^2 + (4 - 6a)y + 2$.

Преобразуя полученное равенство, приведём его к виду $(a - 2)(y + 1)^2 = 0$. Если $a = 2$, то $D = 0$ при любом значении y, то есть снова получится бесконечно много пар, значит, $a = 2$ также следует исключить.

Если же $a \neq 2$, то $y = -1$, тогда $x = 3$, то есть исходному равенству удовлетворяет единственная пара $(3; -1)$.

Предложил А. Хачатурян

Комментарий. Условие задачи корректно, а «ответ» и «решение» – неверные. При этом, общая идея «решения» (рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно x) вполне разумна, поэтому решение можно «доработать».

В решении верно рассмотрен (и отвергнут) случай $a = 0$. При $a \neq 0$ уравнение действительно становится квадратным относительно переменной x. Но анализ количества решений в зависимости от значения его дискриминанта проведён неверно. Утверждение «Условие задачи может быть выполнено только в том случае, когда дискриминант этого уравнения равен нулю» является некорректным. Кроме того, если $a \neq 2$ и $y \neq -1$, то $D \neq 0$, поэтому могут найтись и другие пары решений помимо (3; –1).

Для того, чтобы решение стало верным, не будем сразу приравнивать дискриминант к нулю, а просто вычислим его: $D = 4a(a - 2)(y + 1)^2$. Ясно, что решения будут только при $D \geq 0$. Это достигается, если $y = -1$ или $a = 2$ или $\begin{cases} a < 0 \text{ или } a > 2, \\ y \neq -1 \end{cases}$.

Так как пара (3; –1) будет являться решением уравнения при любом значении a, то необходимо выяснить, при каких a не будет других пар, являющихся решением. В «решении» верно отмечено, что $y = -1$ порождает только пару (3; –1), верно рассмотрен и отвергнут случай $a = 2$, но и в случае, когда $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ появятся другие решения. Например, при $y = 0$ можно получить решение $\left(1 + \sqrt{\frac{a-2}{a}}; 0\right)$.

Таким образом, верный **ответ**: уравнение имеет одно решение, если $0 < a < 2$.

Можно предложить и другой способ решения. Угадав пару (3; –1), положим $x = u + 3$, $y = v - 1$. Так как каждой паре $(x; y)$ соответствует ровно одна пара $(u; v)$, то требуется найти такие a, при которых уравнение, полученное после замены переменных, имеет ровно одно решение. После подстановки $x = u + 3$, $y = v - 1$ все члены уравнения со степенями, меньшими двух, «волшебным образом» взаимно уничтожаются, после чего уравнение принимает вид: $au^2 + 4auv + (3a + 2)v^2 = 0$.

Решению (3; –1) исходного уравнения соответствует $u = v = 0$, поэтому выясним, когда у этого уравнения найдутся ненулевые решения.

Если $v = 0$, то $au^2 = 0$, то есть при $a = 0$ любая пара $(u; 0)$ является решением. При $v \neq 0$ полученное уравнение можно разделить на v^2. Получим уравнение $at^2 + 4at + 3a + 2 = 0$, где $t = \frac{u}{v}$, $a \neq 0$. Это уравнение имеет корни, если $D = 4a(a - 2) \geq 0$ и среди этих корней обязательно будут ненулевые. Это соображение приводит к ответу, приведенному выше.

<u>Критерии проверки</u>. *Баллы за 1) и 2) суммируются.*

1) Указано, что условие задачи корректно, и верно объяснено, где именно и в чем допущена ошибка в «решении» – 5 баллов

Указано только, что «ответ» не верен и приведен контрпример – 3 балла

В явном виде ошибка не указана, но фактически видна из приведенного верного решения – 3 балла, но если при этом допущена собственная вычислительная ошибка – 2 балла

Указано только, что «ответ» не верен – 1 балл

2) Приведено любое верное решение и получен верный ответ – 5 баллов

Приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка – 2 балла

10. Биссектриса. *На уроке геометрии была предложена задача*: «В треугольнике ABC: $AB = 3$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60°$. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной к стороне BC».

Одним из учеников было предъявлено следующее решение.

Пусть $AD = L$ – искомая биссектриса. По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC = 27$; $BC = 3\sqrt{3}$. По свойству биссектрисы треугольника: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Обозначив длину *BD* через *x*, получим уравнение $\frac{x}{3\sqrt{3}-x}=\frac{3}{6}$, откуда *x* = $\sqrt{3}$. По теореме косинусов из треугольника *ABD*: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD$. Подставив известные значения, получим квадратное уравнение $L^2 - 3\sqrt{3}L + 6 = 0$. Его корни: $L_1 = \sqrt{3}$; $L_2 = 2\sqrt{3}$. Таким образом, длина биссектрисы равна $\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$.

1) Предложите как, не приводя других способов решения, объяснить ученику:

а) что в этой задаче не может быть двух ответов;

б) какой из двух ответов является верным.

2) Каков геометрический смысл «постороннего» ответа?

3) Приведите другой способ решения этой задачи.

Предложил В. Жук

Комментарий. 1) а) Треугольник однозначно задается двумя сторонами и углом между ними. Следовательно, данные задачи определяют единственный треугольник и его биссектриса может иметь только одну определенную длину.

б) Объяснить, что верным ответом является $L = 2\sqrt{3}$, можно по-разному.

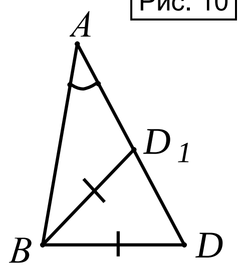
1) Например, заметим, что если $AD = \sqrt{3}$, то для треугольника *ACD* не выполняется неравенство треугольника. Действительно, в этом случае *AD* + *CD* < *AC*, что невозможно.

2) Можно использовать, что длина биссектрисы *AD* должна быть не меньше длины высоты *AH*. Найдем *AH*, например, так: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin 60^0=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH$. Так как $BC = 3\sqrt{3}$, то *AH* = 3. Следовательно, значение $L = \sqrt{3} < 3$.

3) Можно также предложить ученику найти длину биссектрисы из треугольника *ACD*, используя, что $CD = 2\sqrt{3}$. Тогда вновь получится квадратное уравнение, корни которого $2\sqrt{3}$ è $4\sqrt{3}$. С точки зрения способа, предложенного в решении ученика, треугольники *BCD* и *ACD* равноценны, то есть верный ответ определяется однозначно.

2) В ходе решения была применена теорема косинусов для треугольника *ABD*, который задан сторонами *AB* и *BD* и углом *BAD*. При данных в задаче условиях существует два различных треугольника с такими длинами сторон и величиной угла: *ABD* и ABD_1 (см. рис. 10). Корень уравнения, посторонний для исходной задачи, соответствует длине стороны AD_1 треугольника ABD_1.

Рис. 10



3) Наиболее короткий способ вычисления биссектрисы произвольного треугольника, заданного двумя сторонами и углом между ними связан с применением формулы $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$. Подставив значения, заданные в условии, получим, что $L = 2\sqrt{3}$.

В случае, если эта формула не знакома, ее можно вывести в процессе решения, используя вычисление площади треугольника двумя способами: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A$ = $\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\angle A}{2}$ + $\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\frac{\angle A}{2}$. После этого достаточно применить формулу синуса удвоенного аргумента.

Кроме того, найдя длины *BD* и *CD*, можно использовать формулу Лагранжа: $l_a^2 = AB\cdot AC - AD\cdot CD$ = 12, то есть $l_a = 2\sqrt{3}$.

Эти способы пригодны независимо от числовых данных в условии, но в этой задаче после того, как найдена длина *BC*, можно заметить, что $AC^2 = AB^2 + BC^2$, следовательно, угол *ABC* прямой. Тогда $AD=\frac{AB}{\cos 30^0}=2\sqrt{3}$.

Задача является хорошей иллюстрацией к мысли Ж. Даламбера: «Алгебра щедра. Зачастую она дает больше, чем у нее спрашивают». (В.М. Тихомиров Рассказы о максимумах и минимумах, МЦНМО, 2006, стр. 41.)

Критерии проверки. *Баллы за 1), 2) и 3) суммируются.*

1) Приведены разумные обоснования для пунктов а) и б) – по 2 балла за каждый пункт

2) Верно дана геометрическая интерпретация «постороннего» ответа – 3 балла

3) Приведен любой другой верный способ решения задачи – 3 балла

Вариант подготовили: А. Блинков, А. Иванищук, И. Раскина, А. Хачатурян, Д. Шноль. Решение задачи №5 – А. Грибалко.