XIV Творческий конкурс учителей математики
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

1. Траволатор. Васе требуется преодолеть фиксированное расстояние в аэропорту. Он идет с постоянной скоростью сначала пешком, а потом продолжает движение, вступив на траволатор (горизонтальный эскалатор), скорость которого также постоянна. По ходу движения ему потребовалось остановиться и завязать шнурок. На каком из двух участков это разумнее сделать, чтобы общее время движения было меньше? (*Время завязывания шнурка меньше, чем время, которое тратится на безостановочное движение по любому из двух участков.*)

Ответ: на втором.

Решение. Первый способ. Пока Вася завязывает шнурок, стоя на траволаторе, траволатор его везёт вперёд, отчего расстояние, которое Васе надо преодолеть, идя по траволатору, уменьшается. А расстояние, которое надо пройти по обычному полу, одинаково в обоих случаях. Поэтому разумнее завязывать шнурок, стоя на траволаторе.

Второй способ. Пусть Васе надо пройти по полу *a* метров, а по траволатору *b* метров, собственная скорость Васи равна v_1 м/мин, скорость траволатора - v_2 м/мин, время завязывания шнурка – *t* минут. Если завязывать шнурок на первом (обычном) участке, то время движения составит $t+\frac{a}{v_1}+\frac{b}{v_1+v_2}$ минут, а если это делать на траволаторе, то $t+\frac{a}{v_1}+\frac{b-v_2t}{v_1+v_2}$ минут. У этих выражений первые два слагаемых одинаковы, а третье слагаемое во втором выражении меньше, поэтому при завязывании шнурка на траволаторе общее время движения меньше.

Фольклор

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Верно составлены алгебраические выражения для поиска времени, но допущена ошибка при сравнении 2 балла
Приведен только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

2. Сравните без помощи калькулятора: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ и *lg*999.

Ответ: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > lg999$.

Решение. Заметим, что $lg999 < lg10^3 = 3$. Докажем теперь, что $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > 3$.

Это следует из цепочки равносильных неравенств, последнее из которых верное: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4} > 3-\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 > (3-\sqrt{2})^3 \Leftrightarrow 4 > 27 - 27\sqrt{2} + 18 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 29\sqrt{2} > 41 \Leftrightarrow 1682 > 1681$. Следовательно, $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > lg999$.

И. Раскина (по мотивам В. Голубева)

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Обосновано, что $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > 3$, но не обоснованно, что lg999 < 3 – 8 баллов
Приведен верный в целом ход рассуждений, но есть пробелы при обосновании того, что $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > 3$ (например, пропущены некоторые шаги при вычислениях) – 8 баллов
Верный ход рассуждений, но допущена арифметическая ошибка – 2 балла
Приведен только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

3. Композиция. Функция *f*(*x*) определена для всех действительных *x* и $f\big(f(x)\big) = kx + b$ ($k \neq 0$). Обязательно ли: а) *f*(*x*) – линейная; б) *f*(*x*) – обратимая?

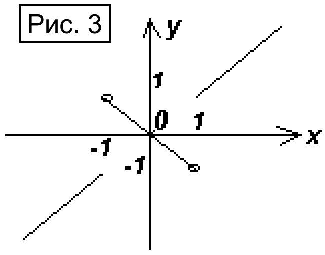
Ответ: а) не обязательно; б) обязательно.

Решение. а) Приведем несколько контрпримеров (во всех случаях $f\left(f(x)\right) = x$).

1) $f(x)=\begin{cases}-2x, \text{ если } x\ge 0,\\ -0{,}5x, \text{ если } x<0\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\ne 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}x, \text{ если } x\in Q,\\ -x, \text{ если } x\notin Q\end{cases}$.

Возможны и другие контрпримеры, в частности, функцию f(x) можно было задать графически. Например, см. рис. 3.

Рис. 3



Отметим также, что все примеры, кроме 1), показывают, что f(x) не обязана быть ни монотонной, ни непрерывной.

б) Предположим, что $f(x)$ – не обратима, то есть существуют такие x_1 и x_2, что $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $f\left(f(x_1)\right)= f\left(f(x_2)\right)$, что противоречит строгой монотонности линейной функции при $k \ne 0$. Таким образом, $f(x)$ обязана быть обратимой функцией.

А. Блинков

Критерии проверки. *Баллы за пункты а) и б) суммируются.*
а) Приведены верные ответ и пример – 5 баллов
Приведен только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов
б) Приведены верный ответ и верное рассуждение – 5 баллов
Приведен только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

4. ГМТ. Дан треугольник *ABC*. Найдите геометрическое место таких точек *M* плоскости, что радиусы окружностей, описанных около треугольников *AMB*, *BMC* и *CMA,* равны.

Ответ: все точки описанной окружности треугольника *ABC* (кроме его вершин) и его ортоцентр (если треугольник не прямоугольный).

Решение. Пусть *M* – искомая точка. Отметим сразу, что *M* не может совпасть с вершиной треугольника. Рассмотрим треугольник *ABM* и опишем вокруг него окружность ω радиуса *R*. Существуют ровно две окружности радиуса *R*, у которых отрезок *AM* является хордой, – это сама окружность ω, а также её образ ω_1 при симметрии относительно прямой *AM*. Так как радиус описанной окружности треугольника *ACM* также равен *R*, то точка *C* лежит на одной из этих окружностей.

Если *C* лежит на ω, то *M* лежит на описанной окружности треугольника *ABC*. Легко видеть, что любая точка описанной окружности треугольника *ABC*, отличная от его вершин, удовлетворяет условию задачи.

Если *C* лежит на ω_1, то аналогично доказывается, что *C* лежит и на окружности ω_2 – образе ω при симметрии относительно прямой *BM*. Пусть *H* – ортоцентр треугольника *ABM*. Точки, симметричные *H* относительно *AM* и *BM*, лежат на окружности ω. Следовательно, *H* – точка пересечения ее образов ω_1 и ω_2. Заметим, что ω_1 и ω_2 пересекаются также в точке *M*, но *C* не совпадает с *M*, значит, *C* совпадает с *H*. Осталось заметить, что если *C* – ортоцентр треугольника *AMB*, то *M* – ортоцентр треугольника *ABC*. Он принадлежит искомому ГМТ, так как окружности, описанные около треугольников *AMB*, *BMC* и *CMA*, симметричны ω относительно соответствующих сторон.

X турнир имени А.П. Савина

Критерии проверки.
Полное обоснованное решение – 10 баллов
Верное в целом решение, но в ответе не оговорен случай прямоугольного треугольника – 9 баллов
Верное в целом решение, но в ответе не оговорено исключение вершин – 8 баллов
Верными рассуждениями найдена только описанная окружность или найден только ортоцентр – 5 баллов
Приведен только верный ответ – 2 балла

Приведена только «половина» верного ответа – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

5. Существует ли тетраэдр, который можно разрезать по ребрам так, чтобы его разверткой оказался треугольник со сторонами 3, 4 и 5?

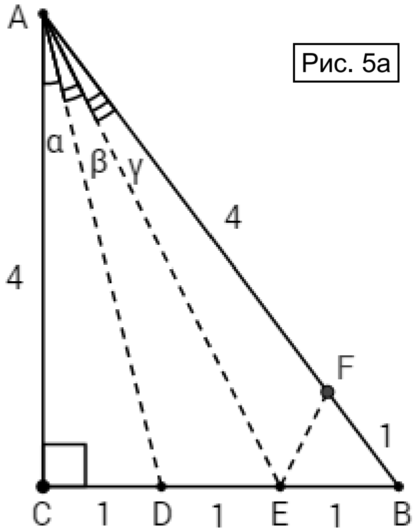


Рис. 5а

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* с указанными сторонами и покажем, что он может являться разверткой тетраэдра. Введем обозначения и проведем линии сгиба так, как показано на рис. 5а.

Теперь достаточно совместить отрезки *AC* и *AF* так, чтобы совпали точки *C* и *F* совпали, после чего, перегнув по *EF*., совмещаем точку *B* с точкой *D*.

Осталось доказать, что в результате действительно получится тетраэдр. Для этого достаточно проверить, что ***сумма любых двух плоских углов при вершине A больше третьего угла***. В таком случае при сложении по сгибам *AD* и *AE* образуется трёхгранный угол. При этом точки *D*, *E* и *F* ≡ *C* в новом положении образуют треугольник *DEF*(*C*), равный треугольнику *BEF* по трём сторонам, поэтому при сложении по сгибу *EF* образуется тетраэдр, и условия существования трёхгранных углов при вершинах *D*, *E* и *F*(*C*) в проверке не нуждаются.

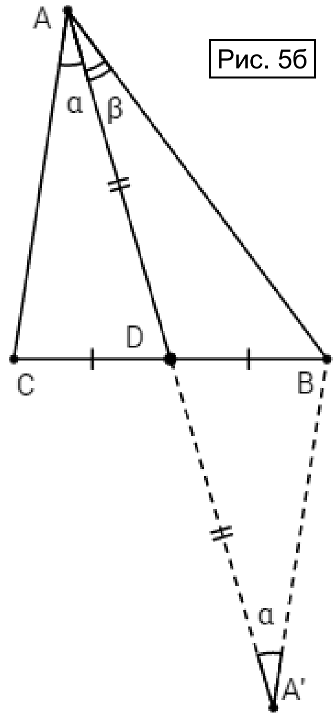


Рис. 5б

Удобно сначала выяснить, какой из углов α, β или γ является наибольшим. Можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Найдем тангенсы этих углов: $tg\alpha = \frac{1}{4}$; $tg\beta = tg(\angle CAE - \angle CAD)$ = $\frac{0{,}5-0{,}25}{1+0{,}5\cdot 0{,}25}$ = $\frac{2}{9}$; $tg\gamma = tg(\angle CAB - \angle CAB)$ = $\frac{0{,}75-0{,}5}{1+0{,}75\cdot 0{,}5}$ = $\frac{2}{11}$. Значит, α > β > γ. Кроме того, $tg(\beta+\gamma)$ = $\frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta tg\gamma}$ = $\frac{8}{19}$ > $tg\alpha$, поэтому $\alpha < \beta + \gamma$, что и требовалось.

Второй способ. Воспользуемся простой леммой.

Лемма. Пусть в треугольнике *ABC AC* < *AB*, *AD* – медиана, $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAD = \beta$. Тогда $\alpha > \beta$.

Доказательство. Удвоим медиану *AD* (см. рис. 5б), тогда *A'B* = *AC* < *A*B, поэтому из треугольника *AA'B* получим: $\angle AA'B = \angle CAD = \alpha. > \angle BAD = \beta$.

На рис. 5а *AD* – медиана треугольника *CAE*, *AE* – медиана треугольника *BAD* и *AC* < *AD* < *FT* < *AB*. Согласно доказанной лемме, получим, что $\alpha > \beta > \gamma$. Осталось доказать, что $\alpha < \beta + \gamma$.

Пусть *AL* – биссектриса треугольника *ABC*. По свойству биссектрисы: *CL* : *LB* = *CA* : *CB* = 4 : 5. Тогда *CD* = 1 < *CL* = $\frac{4}{3} < \frac{1}{2}$ÂÑ = 1,5. Следовательно, $\alpha < \frac{1}{2}\angle CAB < \beta + \gamma$.

На первый взгляд может показаться, что существует более простой пример, а именно: рассмотрим треугольник со сторонами 3, 4 и 5, проведем его средние линии и получим искомую развертку. Но в этом случае условие существования трехгранного угла выполняться не будет, так как сумма двух углов при вершине будет равна третьему углу. Подобным образом можно получить равногранный тетраэдр только тогда, когда его разверткой служит остроугольный треугольник.

Тем не менее, другие примеры существуют. Приведем еще две возможные развертки, которые встретились в работах участников (см. рис. 5в и 5г). Обоснование того, что из них можно сложить тетраэдр, временно опускаем.

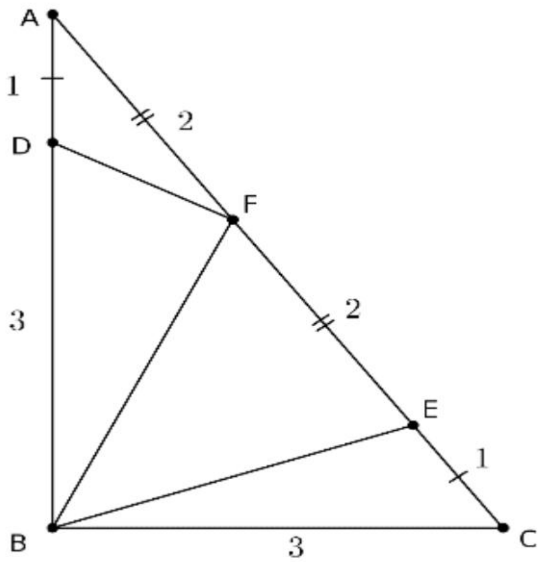


Рис. 5в

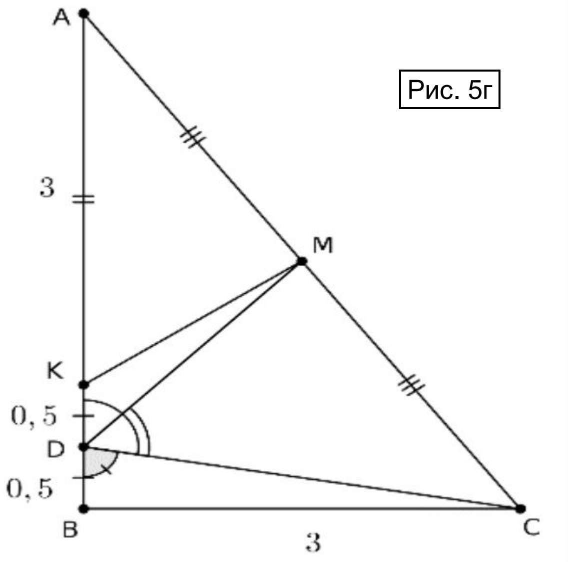


Рис. 5г

С. Маркелов, II Олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведен верный пример развертки, но существование тетраэдра не обосновано – 5 баллов

Приведен только ответ – 0 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок.

В заданиях №№6 – 8 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. Лжецы. «Задача». На острове живут два племени: рыцари и лжецы (каждый знает, кто из какого племени). 100 жителей встали в круг. Каждый из них ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Лжец ли ваш правый сосед?». Ответов «Да» оказалось столько же, сколько лжецов. Какое наибольшее количество лжецов могло быть в круге?

«Ответ»: 50 лжецов.

«Решение». *Оценка*. По кругу чередуются группы из подряд стоящих лжецов и рыцарей. Ответ «Да» возникает только в парах лжец – рыцарь или рыцарь – лжец на стыке групп. Количество пар равно количеству ответов «Да», что по условию равно количеству лжецов. Значит, каждый лжец входит ровно в одну пару, пары не пересекаются, и поэтому их не более пятидесяти.

Пример. Чередуются рядом стоящие пары лжецов и рыцарей. «Да» ответили все, чей сосед справа из другого племени.

Комментарий. Условие задачи корректно, а «ответ» и «решение» неверные. Оценка содержит ошибочное утверждение о том, что указанные в «решении» пары не пересекаются. Действительно, даже однозначное соответствие между выбранными парами и входящими в них лжецами не мешает парам пересекаться по рыцарю. Приведем верное решение.

Ответ: 66 лжецов.

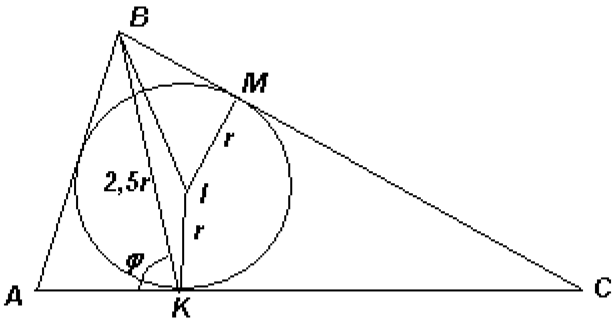
Оценка. Предположим, что лжецов не меньше, чем 67, тогда рыцарей не больше, чем 33. Каждый лжец, сказавший «Да», должен стоять слева от рыцаря, поэтому таких лжецов не больше, чем 33. Ответ «Да» могли дать только они и рыцари, то есть получено не больше, чем 66 ответов «Да». Противоречие.

Пример. Пусть лжецов – 66, рыцарей – 34. Разобьем их на 32 тройки вида ЛРЛ и четверку ЛРРЛ и поставим подряд по кругу. В каждой тройке ответ «Да» дали первый и второй, а в четверке – первый и третий.

Предложили А. Грибалко, Л. Медников, А. Шаповалов
(по задаче А. Шаповалова, XIX турнир имени А.П. Савина)

Критерии проверки. *Баллы за 1) и 2) суммируются.*
1) Указано, что условие задачи корректно, а «ответ» неверен, и верно объяснено, где допущена ошибка в «решении» – 5 баллов
Указано только, что «ответ» неверен и приведен пример, когда лжецов больше, чем 50) – 2 балла (при условии, что не получены баллы за верный пример в пункте б)
2) Приведено верное решение – 5 баллов
Приведены только верный ответ и пример – 2 балла

7. Угол. «Задача». В треугольнике ABC угол B равен 60°. Вписанная в него окружность касается стороны AC в точке K. Найдите синус угла между прямыми AC и BK, если длина BK в 2,5 раза больше, чем радиус вписанной окружности.



«Ответ»: 0,65.
«Решение». Пусть I – центр вписанной окружности, r – ее радиус, M – точка ее касания со стороной BC (см. рис.). Так как $\angle MBI = 30°$, то $BI = 2r$. Пусть $\angle AKB = \varphi$, тогда $\angle IKB = 90° - \varphi$. Учитывая, что $BK = 2{,}5r$, из треугольника IKB по теореме косинусов получим: $4r^2 = r^2 + 6{,}25r^2 - 5r^2\cos(90° - \varphi)$. Тогда $\sin\varphi = 0{,}65$.

Комментарий*.* Условие задачи некорректно. В заданном треугольнике длина BK не может быть в 2,5 раза больше, чем радиус вписанной окружности. Покажем это.

Без ограничения общности можно считать, что угол A треугольника не меньше, чем угол C (что соответствует рисунку в условии). Так как угол B равен 60°, то угол A меньше, чем 120°. В четырехугольнике $ABIK$: $\angle ABI = 30°$, $\angle AKI = 90°$, $\angle BAK < 120°$, следовательно, $\angle BIK > 120°$. Из треугольника IKB по теореме косинусов получим: $BK^2 = r^2 + 4r^2 - 4r^2\cos\angle BIK$. Так как $\cos\angle BIK < -0{,}5$, то $BK > r\sqrt{7} > 2{,}5\,r$.

При этом, ход «решения» в целом верен, но содержит один недочет. Стоило пояснить, почему в данном случае точки B, I и K не лежат на одной прямой (такая ситуация может возникнуть, если ABC – равнобедренный треугольник). Это следует из того, что. $BI = 2r$, $IK = r$, $BK = 2{,}5r$, то есть $BK < BI + IK$.

Противоречивость условия «задачи» можно выявить и по-другому, отталкиваясь от полученного «ответа». Исходя из того, что $\sin\varphi = 0{,}65$, *вычислим высоту* BH *данного треугольника:* $BH = BK\cdot\sin\varphi = 2{,}5r\cdot 0{,}65 = \dfrac{13}{8}r < 2r$, *что невозможно, так как в любом треугольнике высота больше, чем* $2r$.

Предложил М. Волчкевич

Критерии проверки. *Баллы за 1) и 2) суммируются.*
1) Подробно объяснено, почему условие задачи некорректно – 9 баллов
Указано, что условие задачи некорректно, но это не объяснено – 1 балл
2) Указано, что в «решении» не разобран случай, когда B, I *и* K *лежат на одной прямой – 1 балл*

8. Букеты. «Задача». 8 марта каждая из n учительниц пришла в школу с одним цветком. При этом оказалось, что все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все имеющиеся у неё цветы или их часть. Нельзя дарить букет, если букет, состоящий из точно тех же цветов, уже кому-то дарили. Какое наибольшее количество букетов могло быть подарено? (*Один цветок – это тоже букет*.)

«Ответ»: $2^n - 1$ букет.
«Решение». Всего из n цветков можно составить $2^n - 1$ различных букетов. Докажем индукцией по n, что все эти букеты могут быть подарены, и при этом в конце у каждой учительницы снова окажется по одному цветку.

База индукции ($n = 2$). Пусть первая учительница принесла розу, а вторая – тюльпан. Тогда первая дарит второй розу, затем вторая первой – оба цветка, а затем первая дарит второй тюльпан.

Шаг индукции (от n к $n + 1$). Пусть первая учительница принесла розу. Сначала она стоит в стороне, а все остальные учительницы дарят друг другу всевозможные букеты без розы согласно алгоритму для n. Единственная поправка: последний букет из одного цветка (скажем, тюльпана) дарится *первой* учительнице. Далее тюльпан с розой склеиваются в один цветок, и снова n учительниц, у которых есть по одному цветку, дарят их друг другу согласно алгоритму для n. В конце учительница с цветком «роза-тюльпан» дарит розу учительнице без цветка, и теперь подарено $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ букетов, и у каждой учительницы ровно по одному цветку.

Комментарий. Условие задачи корректно, «ответ» верный (если $n \geq 2$), а «решение» содержит ошибку. В нем никак не обосновано, что среди подаренных букетов нет одинаковых, и это не случайно. При указанном алгоритме каждый букет без розы и тюльпана будет подарен один раз до «склеивания» цветов и один раз после «склеивания». Приведем верное решение, указав два способа, один из которых по индукции, а другой – без нее.

<u>Первый способ</u>. Докажем по индукции, что можно передать все возможные букеты, причём делать это «по цепочке», то есть если учительница только что получила букет, то теперь именно она должна делать следующий подарок. Удобно считать, например, что есть фишка, которую передают каждый раз вместе с букетом, и дарит следующий букет та учительница, у которой сейчас фишка.

База индукции ($n = 2$) – такая же, как в «решении».

Индукционный переход. Пусть одна учительница (например, с розой) отойдёт в сторонку. Одной из оставшихся n учительниц дадим фишку. По индукционному предположению среди этих n учительниц можно организовать по одному разу дарение всех возможных букетов по цепочке, то есть передавая каждый раз вместе с букетом фишку. Сделаем это с одним уточнением: самый последний букет в цепочке надо подарить учительнице с розой. Она заменит фишку на розу, вернёт букет с добавленной розой той, что ей дарила только что, и снова отойдёт в сторонку. Далее запустим процесс в обратную сторону, но роль фишки будет играть роза. Это возможно, так как он был организован по цепочке. Из-за добавленной розы ни один из новых букетов не совпадёт ни с одним из старых. А два новых букета не совпадут, так как отличаются от старых (которые по индукционному предположению различны) только наличием розы.

<u>Второй способ</u>. Букет из всех n цветков назовём *полным*, а все остальные букеты разобьём на пары, дополняющие друг друга до полного. Пронумеруем учительниц и цветы числами от 1 до n. Пусть сначала первая учительница подарит свой цветок второй, вторая подарит оба цветка третьей, третья – все цветы четвёртой, и так далее, пока у n-й учительницы не соберётся полный букет. Пока что подарены букеты $\{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ – по одному из $n - 1$ пары букетов. Назовём эти пары *разбитыми*. Теперь n-я учительница дарит кому-нибудь полный букет, после чего получившая его учительница делит его на два меньших букета из какой-нибудь неразбитой пары и последовательно дарит сначала первый, а потом второй какой-то другой учительнице. Далее учительницы действуют так же, пока не будут подарены все букеты из неразбитых пар. Осталось подарить вторые букеты из разбитых пар: из полного букета дарится $\{2, 3, \ldots, n\}$, получившая его учительница дарит $\{3, \ldots, n\}$ и так далее, последняя дарит букет $\{n\}$.

Предложили А. Грибалко, Л. Медников, А. Шаповалов
(по задаче А. Чеботарева, IX турнир имени А.П. Савина)

<u>Критерии проверки</u>. *Баллы за 1) и 2) суммируются.*

1) Указано, что условие задачи корректно, «ответ» верный, и объяснено, где допущена ошибка в «решении» – 5 баллов
Указано только, что при n = 1 ответ неверен – 1 балл
2) Приведено верное решение – 5 баллов

9. Сумма цифр. *На контрольной работе была предложена задача*: «Можно ли нечетное число *N* представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?». *Значение N варьировалось в зависимости от варианта. Для N = 197 учениками были предложены такие решения*.

«Решение Ани». Попробуем представить число 197 в виде суммы двух чисел, начиная с суммы 196 + 1. Видим, что суммы цифр данных чисел не равны. Теперь будем отнимать от первого числа по единице и прибавлять единицу ко второму, чтобы сумма сохранялась. Увидим, что как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17. Пусть в одном из чисел суммы сумма цифр равна m, тогда сумма цифр второго числа $17 - m$. Они равны, если $m = 17 - m$, откуда получаем, что $m = 8{,}5$. Но m целое, следовательно, получили противоречие. Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

«Решение Вани». Пусть $197 = \overline{xyz} + \overline{ab}$ (понятно, что получить 197, складывая два трехзначных числа, невозможно, а сумма 98 и 99 не обладает требуемым свойством). Тогда $197 = 100x + 10(y + a) + (z + b)$. Откуда получаем, что $x = 1$, $y + a = 9$, $z + b = 7$. Значит, одно из чисел y и a нечетно, а другое – четно. Аналогично, для чисел z и b. Если суммы цифр слагаемых равны, то $x + y + z = a + b$, то есть $x + y + z - a - b = 0$. Но алгебраическая сумма трех нечетных и двух четных чисел не может быть равна нулю. Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

а) Прокомментируйте каждое из решений и полученный ответ, указав все ошибки и неточности (если они есть).

б) Укажите четыре трехзначных значения N, которые Вы бы выбрали для такой задачи с тем, чтобы во всех вариантах был ответ «нельзя».

в) Обоснуйте Ваш выбор.

Комментарий. а) «Решение Ани» содержит неверное утверждение: «Увидим, что как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17.». Например, для разложения 197 = 79 + 118 это утверждение неверно.

В «Решении Вани» допущена ошибка при составлении системы, так как $z + b$ может равняться не только 7, но и 17. Во втором случае $y + a = 8$ и противоречия с четностью не возникает.

Таким образом, оба «решения» неверны. Неверен также и полученный ими ответ. Например, в равенствах 197 = 49 +148 и 197 = 58 + 139 слагаемые имеют одинаковые суммы цифр.

б) Например, любые четыре числа из пяти: 199, 399, 599, 799, 999.

в) Для обоснования можно воспользоваться ходом рассуждений в «Решении Вани». Для любого из указанных чисел $z + b = y + a = 9$, поэтому действительно получится противоречие, связанное с четностью. Покажем это

Пусть p = 1, 3, 5, 7, 9 и $\overline{p99} = \overline{xyz} + \overline{cab}$ (c или a могут быть нулями, если второе слагаемое двузначное или однозначное). Тогда $\overline{p99} = 100(x + c) + 10(y + a) + (z + b)$. Следовательно, $x + c = p$, $y + a = 9$, $z + b = 9$. Значит, одно из чисел x или c нечетно, а другое – четно. Аналогичный вывод можно сделать и для двух других пар чисел: y и a, z и b. Если суммы цифр слагаемых равны, то $x + y + z = c + a + b$, то есть $x + y + z - c - a - b = 0$. Но алгебраическая сумма трех нечетных и трех (или менее) четных чисел не может быть равна нулю. Таким образом, число $\overline{p99}$ при нечетных значениях p нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

Можно доказать, что других трехзначных чисел, удовлетворяющих требуемому условию, кроме указанных в пункте б), не существует.

Предложил А. Иванищук

<u>Критерии проверки</u>. Баллы внутри пункта а) и за пункты а) – в) суммируются.
а) Указано, что «ответ» неверен и приведен контрпример – 1 балл
Верно указана ошибка Ани – 2 балла
Верно указана ошибка Вани – 2 балла
б) Верно указаны четыре возможных значения N – 2 балла
Верно указаны возможные значения N, но их меньше, чем четыре – 1 балл
в) Верно обоснован ответ пункта б) – 3 балла, если ответ в пункте б) был полным, иначе – 1 балл

10. Уравнения. Иногда полезно предлагать старшеклассникам алгебраические уравнения с бесконечным множеством корней. Составить уравнение, множеством корней которого является отрезок, можно, например, так. Рассмотрим функцию $f(x)$ и числа $a < b$. Тогда уравнению $|f(x) - a| + |f(x) - b| = b - a$ удовлетворяют те и только те значения x, для которых $a \le f(x) \le b$. Например, взяв $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$, получим уравнение $|x + 1| + |x - 1| = 2$, множеством решений которого является отрезок [–1; 1]. Можно составить уравнение и посложнее.

а) Докажите, что множеством решений уравнения $\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$ *является отрезок.*
б) Покажите, что это уравнение имеет вид $|f(x) - a| + |f(x) - b| = b - a$, *указав a, b и f(x).в явном виде.*
в) Докажите, что если x – любая внутренняя точка отрезка, о котором идёт речь в пункте а), то $\dfrac{\sqrt{6x-9}+3}{\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}}$ + $\dfrac{\sqrt{6x-9}-3}{\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}}$ *= 0.*

Комментарий. а) <u>Первый способ</u>. После возведения обеих частей уравнения в квадрат и упрощения получим: $2x+2\sqrt{x^2-6x+9}=6 \Leftrightarrow x + |x - 3| = 3 \Leftrightarrow x \le 3$.

Кроме того, $6x - 9 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1{,}5$. При таких значениях x оба корня в левой части исходного уравнения имеют смысл, так как $x+\sqrt{6x-9} > 0$, $\left(x-\sqrt{6x-9}\right)\left(x+\sqrt{6x-9}\right) = (x-3)^2 \ge 0$, следовательно, $x-\sqrt{6x-9} \ge 0$. Таким образом, решением уравнения является отрезок [1,5; 3].

Можно также до возведения в квадрат ввести новую переменную, например, $t = \sqrt{6x-9} \ge 0$, *тогда* $x=\dfrac{t^2+9}{6}$ *и уравнение примет вид* $\sqrt{\dfrac{t^2+9}{6}-t} + \sqrt{\dfrac{t^2+9}{6}+t} = \sqrt{6}$. *Оно сводится к уравнению* $|t - 3| + |t + 3| = 6 \Leftrightarrow -3 \le t \le 3$. *Обратная замена приведет к ответу, указанному выше.*

<u>Второй способ</u>. Воспользуемся «формулой сложного радикала»: $\sqrt{a\pm b} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Рассматривая левую часть данного уравнения как правую часть этой формулы, то есть полагая $a = x$ и $a^2 - b = x^2 - b = 6x - 9$, получим, что $b = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Тогда исходное уравнение примет вид: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{x+|x-3|}=\sqrt{6} \Leftrightarrow x + |x - 3| = 3$. Дальнейшие рассуждения – см. первый способ.

Можно воспользоваться той же формулой и «слева направо», записав по формуле два равенства: $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2-6x+9}}{2}} + \sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x^2-6x+9}}{2}}$ *и* $\sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2-6x+9}}{2}} - \sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x^2-6x+9}}{2}}$. *После подстановки в исходное уравнение и упрощения опять придем к уравнению* $x + |x - 3| = 3$

б) Снова воспользуемся заменой t = $\sqrt{6x-9}$, тогда уравнение примет вид: $\sqrt{\frac{t^2-6t+9}{6}}+\sqrt{\frac{t^2+6t+9}{6}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|t-3|}{\sqrt{6}}+\frac{|t+3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$. После обратной замены получим, что $\left|\sqrt{x-1,5}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right|+\left|\sqrt{x-1,5}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right|=\sqrt{6}$. Таким образом, $f(x)$ = $\sqrt{x-1,5}$, a = $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, b = $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Можно рассуждать и по-другому. Попробуем найти наиболее симметричный вид для требуемого выражения. Пусть числа a и b будут противоположными, то есть a = $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, *b =* $\frac{\sqrt{6}}{2}$*. Для поиска f(x) можно, например, использовать, что* $\left(f(x)+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$ = $x+\sqrt{6x-9} \Leftrightarrow f^2(x)+f(x)\sqrt{6}+1,5$ = $x+\sqrt{6x-9}$. *Естественно предположить, что* $f(x)\sqrt{6}$ = $\sqrt{6x-9}$, *то есть f(x) =* $\sqrt{x-1,5}$, *и подстановкой убедиться, что это действительно так*.

Отметим также, что из решения пункта б) в качестве следствия можно получить и решение пункта а).

в) Упростить левую часть предложенного равенства можно по-разному.

<u>Первый способ</u>. Сделаем замену t = $\sqrt{6x-9}$, тогда $x=\frac{t^2+9}{6}$. Так как $1,5 \le x \le 3$, то $0 \le t \le 3$. Следовательно, $\frac{\sqrt{6x-9}+3}{\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}}$ + $\frac{\sqrt{6x-9}-3}{\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}}$ = $\frac{t+3}{\sqrt{\frac{t^2+9}{6}+t}}$ + $\frac{t-33}{\sqrt{\frac{t^2+9}{6}-t}}$ = $\sqrt{6}\left(\frac{t+3}{|t+3|}+\frac{t-3}{|t-3|}\right)$ = 0, так как при указанных значениях t первое слагаемое в скобке равно 1, а второе равно –1.

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим функцию $g(x)$ = $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}$ + $\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}$. При $x \in (1,5; 3)$ эта функция дифференцируема. Так как $g(x)$ = $\sqrt{6}$ для всех x из указанного промежутка, то $g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6x-9}}\cdot\left(\frac{\sqrt{6x-9}+3}{\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}}\right.$ + $\left.\frac{\sqrt{6x-9}-3}{\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}}\right)$ = 0. Следовательно, требуемое равенство выполняется для всех $x \in (1,5; 3)$.

Предложили А. Иванищук, А. Хачатурян

<u>Критерии проверки</u>. Баллы за пункты а) – в) суммируются.

а) Верно решено данное уравнение – 2 балла

Ход решения верен, но допущена вычислительная ошибка – 1 балл

б) Доказано, что уравнение имеет требуемый вид, и предъявлены значения a, b и f(x) – 4 балла

Требуемые значения указаны верно, но недостаточно обосновано – 2 балла

Верно указаны только значения a и b – 1 балл

в) Приведено верное доказательство – 4 балла

Приведено верное в целом рассуждение, но ошибочно указано, что равенство верно на концах отрезка

Есть верная идея доказательства, но оно не доведено до конца, либо содержит ошибку – 1 балл

Вариант подготовили А. Блинков, А. Иванищук, Д. Прокопенко, И. Раскина, А. Хачатурян, Д. Шноль.