XV Творческий конкурс учителей математики
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

1. Тест. В тесте к каждому вопросу указано 5 вариантов ответа. Когда двоечнику удается списать, он отвечает верно, в противном случае – наугад (то есть среди несписанных ответов – пятая часть верных). За год двоечник верно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Ответ: 3/8.

Решение. Первый способ. Пусть за год двоечник списал x и угадал y верных ответов, тогда всего ответов было $x + 5y$. По условию, $\frac{x+y}{x+5y}=\frac{1}{2}$, откуда $x = 3y$. Доля списанных ответов составляет $\frac{x}{x+5y}=\frac{3y}{3y+5y}=\frac{3}{8}$.

Второй способ. Пусть d – доля несписанных ответов, тогда неверных ответов $\frac{4}{5}d$. Из условия задачи следует, что $\frac{4}{5}d = \frac{1}{2}$, то есть $d = \frac{5}{8}$. Следовательно, доля списанных ответов: $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

И. Ященко, Математический праздник, 1997 г.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию – 2 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

2. Функция. Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, не параллельная оси OX. Найдите эту функцию, если известно, что для всех x выполняется равенство $f\left(2018-f(x)\right)=2018-2f(x)$.

Ответ: $f(x)=2x-2018$.

Решение. Первый способ. Из условия задачи следует, что указанная функция принимает все действительные значения. Рассмотрим такое x, что $f(x)=0$. Тогда $f(2018)=2018$. Теперь рассмотрим такое x, что $f(x)=2018$. Тогда $f(0)=-2018$.

По двум точкам графика (0; –2018) и (2018; 2018) линейная функция восстанавливается однозначно: $f(x)=2x-2018$. Можно убедиться, что она удовлетворяет условию.

Второй способ. Пусть $f(x)=kx+b$. Тогда равенство из условия задачи примет вид: $k\left(2018-kx-b\right)+b=2018-2\left(kx+b\right)$. Преобразовав его, получим: $\left(2k-k^2\right)x+k\left(2018-b\right)+3b-2018=0$. Это равенство должно выполняться для всех значений x, следовательно, $2k=k^2$ и $k\left(2018-b\right)+3b=2018$. По условию $k\neq 0$, поэтому из первого равенства получим, что $k=2$. Подставив это значение во второе равенство, найдём, что $b=-2018$.

Фольклор

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка – 5 баллов
Приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию – 2 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

3. Домино. Можно ли на доску размером 10×10 клеток положить 9 костяшек домино размером 1×2 так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали они занимали нечётное количество клеток?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что это можно сделать. Каждая доминошка лежит либо вертикально, либо горизонтально. Так как их 9, то доминошек какого-то типа (например, горизонтальных) не более четырех. Тогда они могут лежать не более чем в восьми столбцах. В оставшихся двух столбцах будут только вертикальные доминошки, то есть в каждом из них будет занято доминошками чётное количество клеток. Противоречие.

Фольклор

<u>Критерии проверки</u>.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Верный ответ получен, исходя из рассмотрения конкретных примеров – 0 баллов

Приведен только ответ – 0 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

Комментарий (только для участников ОЧНОГО тура!). *По вине организаторов некоторые участники трактовали условие задачи иначе: вертикали и горизонтали, в которых нет клеток, занятых доминошками, можно не учитывать, то есть нечетное количество клеток должно быть только в тех горизонталях и вертикалях, в которых есть занятые клетки. В этом случае ответ в задаче положительный и существует много примеров. Один из них приведен на рис. 3.*

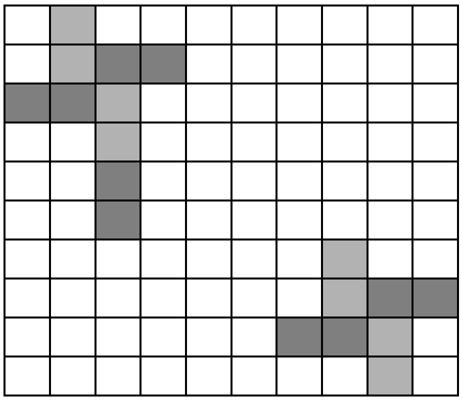


Рис. 3

Жюри приняло решение ставить максимальный балл за верное решение задачи в любой из трактовок. Кроме того, участники, которые привели верные решения для обеих версий трактовки условия, получили 5 премиальных баллов.

Организаторы конкурса приносят свои извинения.

4. Тетраэдр. Биссектрисы двух плоских углов при вершине тетраэдра взаимно перпендикулярны. Найдите углы, которые каждая из этих биссектрис образует с биссектрисой третьего плоского угла тетраэдра при той же вершине.

Ответ: по 90° с каждой.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть в пирамиде *SABC* (*S* – вершина пирамиды) биссектрисы углов *ASB* и *BSC* перпендикулярны. Обозначим через $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{e_3}$ единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ и $\overline{SC}$ соответственно. Тогда вектор $\vec{e}_1+\vec{e}_2$ сонаправлен с биссектрисой угла *ASB*, а вектор $\vec{e}_2+\vec{e}_3$ сонаправлен с биссектрисой угла *BSC*. Из перпендикулярности этих биссектрис следует, что $(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot(\vec{e}_2+\vec{e}_3) = 0 \Leftrightarrow \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_2^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + 1 = 0$.

Вектор $\vec{e}_1+\vec{e}_3$ сонаправлен с биссектрисой угла *CSA*. Вычислим соответствующее скалярное произведение: $(\vec{e}_1+\vec{e}_3)\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2) = \vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = 1 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = 0$. Это означает перпендикулярность биссектрис углов *CSA* и *ASB*. Перпендикулярность биссектрис углов *CSA* и *BSC* доказывается аналогично.

<u>Второй способ</u>. Пусть в тетраэдре *DABC* перпендикулярны *BL* и *BK* – биссектрисы граней *ABD* и *DBC* соответственно (см. рис. 4). Пусть также *BN* – внешняя биссектриса треугольника *DBC*, тогда *BN*⊥*BK*, значит, *BK* перпендикулярна плоскости *BNL* (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Пусть *NL* пересекается с *AC* в точке Q. Докажем, что *BQ* – биссектриса треугольника *ABC*.

Действительно, по свойству внутренней и внешней биссектрис: $\frac{AL}{DL} = \frac{AB}{DB}$ и $\frac{CN}{DN} = \frac{CB}{DB}$. По теореме Менелая для треугольника *ADC* и прямой *NQ*, получим: $\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DL}{LA}$ = 1. Из этих трех равенств следует, что $\frac{AQ}{QC} = \frac{AB}{CB}$, то есть *BQ* – биссектриса треугольника *ABC*.

Так как *BQ* лежит в плоскости *BLN*, то *BQ*⊥*BK*. Аналогично доказывается, что *BQ*⊥*BL*.

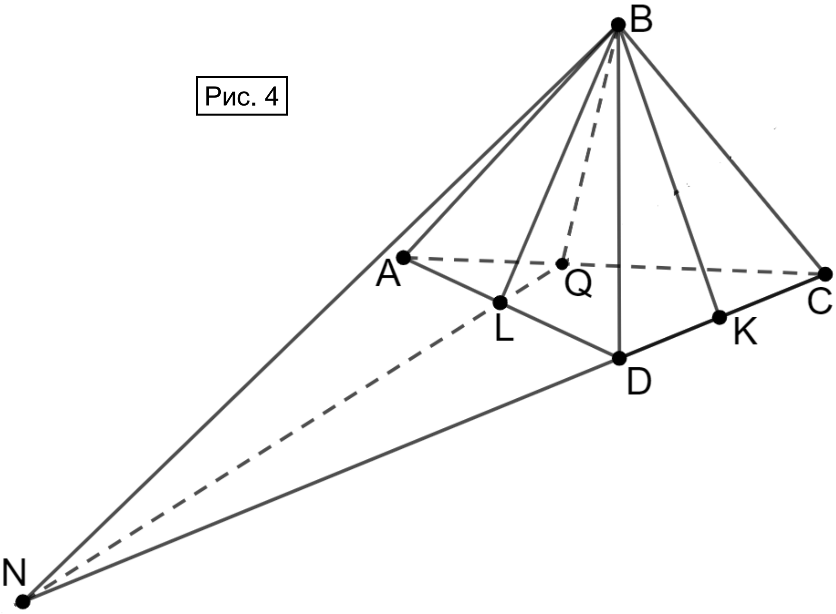


Рис. 4

Фольклор

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Доказано, что скалярное произведение равно нулю, но вывод не сделан и ответ отсутствует – 7 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

5. Система. Решите в натуральных числах систему: $\begin{cases} xy = zt, \\ x^y = z^t. \end{cases}$

Ответ: три серии решений: 1) $x = z = m$, $y = t = n$; 2) $x = 4$, $y = m$, $z = 2$, $t = 2m$; 3) $x = 2$, $y = 2m$, $z = 4$, $t = m$ (m, n – произвольные натуральные числа).

Решение. Преобразуем исходную систему: $\begin{cases} xy = zt \\ x^y = z^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{xy}{z} \\ x^y = \left(z^{\frac{x}{z}}\right)^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{xy}{z} \\ x^z = z^x \end{cases}$

1) Очевидно, что оба равенства будут верными, если $x = z$ и $t = y$.

2) Пусть $x > z$. Тогда из второго уравнения следует, что $\left(\frac{x}{z}\right)^z = z^{x-z}$, откуда $x = kz$, где $k \neq 1$ – некоторое натуральное число. Подставляя в систему, получим: $\begin{cases} t = ky \\ x = kz \\ k^z = z^{kz-z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ky \\ x = kz \\ k = z^{k-1} \end{cases}$.

Заметим, что $z \neq 1$ (иначе в последнем равенстве $k = 1$). Тогда воспользуемся тем, что $z^{k-1} \geq 2^{k-1} > k$ при $k > 2$ (легко доказывается, например, по индукции). Значит, $k = z = 2$, $x = 4$ и $2y = t$. Тем самым получена ещё одна серия решений.

3) Пусть $x < z$. Рассуждая аналогично пункту 2), получим набор чисел: $x = 2$, $y = 2m$, $z = 4$, $t = m$.

В. Сендеров, IX турнир математических боев имени А.П. Савина

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором без обоснования использовано, что при x > z x делится на z – 9 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором без обоснования использовано, что x и z являются степенями одного и того же натурального числа – 7 баллов
Верный в целом ход рассуждений, но потеряна одна из двух симметричных серий ответа – 5 баллов
Приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию – 2 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок.

6. Процент. «Задача». В 6 «А» классе учится 24 человека, что с точностью до десятых процента составляет 6,9 % от количества учеников школы. В 8 «А» классе учится 33 человека. Какой процент (с точностью до десятых) всех учеников школы учится в 8 «А» классе?

«Ответ». 9,5 %.

«Решение». Запишем в виде таблицы условие задачи и составим пропорцию:

24 чел.	6,9%
33 чел.	*x* %

$\frac{x}{6{,}9}=\frac{33}{24}$, $x=\frac{33\cdot 6{,}9}{24}$, $x=9{,}4875$. После округления до десятых получаем ответ 9,5%.

В этом тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

Комментарий. Постановку «задачи» можно признать корректной только если допускать возможность неоднозначного ответа. Дать однозначный ответ на неё нельзя.

В «решении». это обстоятельство не учитывается. Поэтому работа с приближённым значением выполнена неаккуратно и в итоге получен неполный «ответ». Кроме того, в «решении» не учтено, что количество детей в школе должно быть целым.

Верное решение требует вычислений с двусторонними оценками. Условие «Количество учащихся 6 «А» составляет *p* = 6,9% (с точностью до десятых процента) от количества учеников школы» означает, что $6{,}85\% \le p < 6{,}95\%$. Общее количество учеников в школе: $k = 24 : p \cdot 100\%$. Оценим его: $2400 : 6{,}95 < k \le 2400 : 6{,}85$. Так как $2400 : 6{,}95 \approx 345{,}3$, а $2400 : 6{,}85 \approx 350{,}4$, то в школе может быть от 346 до 350 учеников. Ученики 8"А" составляют от $\frac{33}{350}\cdot 100\% \approx 9{,}4\%$ до $\frac{33}{346}\cdot 100\% \approx 9{,}5\%$.

Верный ответ. 9,4% или 9,5%.

Приведённое условие не позволяет получить однозначный ответ даже с точностью до целых, поскольку тогда $\frac{33}{350}\cdot 100\% \approx 9\%$, а $\frac{33}{346}\cdot 100\% \approx 10\%$. Вообще, в задаче на умножение с хотя бы одним приближённым множителем нельзя гарантированно указать ни одной верной цифры в произведении. Этот факт лишь на первый взгляд противоречит правилу приближённых вычислений: «В произведении следует оставлять столько же цифр, сколько в наименее точном множителе». Точность вычислений характеризуется не количеством верных цифр, а погрешностью. Например, если вместо результата 1,99...97 получен результат 2,00...03, верной цифры ни одной, а погрешность (как абсолютная, так и относительная) при достаточно большом количестве девяток и нулей сколь угодно мала.

С этой точки зрения постановка задачи вполне разумна. Просто приходится смириться, что последняя цифра отличается от верной на 1 как при округлении до десятых процента, так и при округлении до целых процентов. Гораздо хуже было бы пытаться дать ответ с точностью до сотых процента, так как указание произведения с большим количеством значащих цифр, чем в наименее точном *сомножителе, абсолютно бессмысленно. Но этой грубой ошибки нет ни в условии, ни в решении задачи.*

Предложил Д. Шноль

Критерии проверки. *Баллы 1) и 2) суммируются.*
1) Верно объяснено, почему у «задачи» не может быть однозначного ответа – 3 балла
Указано, что в «решении» не учтено, что количество учеников школы должно быть целым – 2 балла
2) Приведено верное решение – 5 баллов

7. Уравнение. *На уроке в 11 классе было предложено решить уравнение* $9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$. *Школьники предложили два различных способа решения, начинающиеся одинаково*.

Пусть $\sqrt{x} = y \geq 0$, тогда уравнение примет вид: $9 \cdot 12^y = 6^{y^2}$.

Первый способ. $9 \cdot (2 \cdot 6)^y = \left(6^y\right)^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^y = 6^y \Leftrightarrow 3^y = 3^2 \Leftrightarrow$ $y = 2$. Тогда $x = 4$.

Второй способ. Разложим числа 9, 12 и 6 на простые множители: $3^{2+y} \cdot 2^{2y} = 2^{y^2} \cdot 3^{y^2}$. Из единственности разложения числа на простые множители следует, что $2 + y = y^2$ и $2y = y^2$. Решением этой системы является $y = 2$. Следовательно, $x = 4$.
а) Если Вы считаете, что в этих решениях есть ошибки, то укажите их.
б) Какой способ решения предложите Вы?
в) Почему оба способа решения привели к одному и тому же ответу?

Комментарий. а) В первом способе допущена грубая ошибка: в общем случае $6^{y^2} \neq \left(6^y\right)^2$. Рассуждения, приведенные во втором способе, предполагают, что обе части уравнения принимают только натуральные значения, а это ниоткуда не следует.
б) Замена переменной ошибок не содержит. Прологарифмируем обе части уравнения, например, по основанию 3. Получим: $2 + y \cdot \log_3 12 = y^2 \cdot \log_3 6 \Leftrightarrow \left(1 + \log_3 2\right)y^2 - \left(1 + 2\log_3 2\right)y - 2 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D = \left(1 + 2\log_3 2\right)^2 + 8\left(1 + \log_3 2\right) = 4\log_3^2 2 + 12\log_3 2 + 9 = \left(2\log_3 2 + 3\right)^2$. Тогда $y = \dfrac{1 + 2\log_3 2 \pm \left(2\log_3 2 + 3\right)}{2\left(1 + 2\log_3 2\right)}$, то есть $y_1 = -\dfrac{1}{1 + 2\log_3 2} < 0$; $y_2 = 2$. Таким образом, $x = 4$.
в) Школьникам повезло, что они получили верный ответ в неверных решениях. Действительно, $\left(6^y\right)^2 = 6^{2y}$, но $2^2 = 2 \cdot 2$, поэтому, в данном случае, замена 6^{y^2} на $\left(6^y\right)^2$ не повлияла на ответ в первом способе решения. Ответ, полученный во втором способе решения, оказался верным, так как при $y = 2$ выражения в обеих частях уравнения действительно принимают натуральные значения.

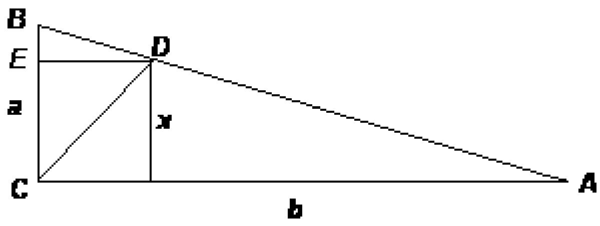
Использован фрагмент из книги В. Литцман. Где ошибка? Москва, Физматгиз, 1962

Критерии проверки. *Баллы а), б) и в) суммируются.*
а) Верно указаны допущенные ошибки – по 2 балла за каждый способ решения
б) Приведено верное решение – 4 балла
в) Верно объяснено, почему в решениях школьников получен верный ответ – по 1 баллу за каждый способ решения

8. Вписанный квадрат. *Учитель предложил классу следующую задачу.*
«Задача». В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника. Найдите сторону квадрата.

Ученик, вызванный к доске, предложил такое решение.

Введем обозначения так, как показано на рисунке. Так как диагональ CD квадрата является биссектрисой угла C, то по свойству биссектрисы и свойству пропорции получим: $\dfrac{a}{BD} = \dfrac{b}{AD} = \dfrac{a+b}{BD+AD} = \dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Отсюда $BD = \dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$. Из треугольника *BDE*: $x^2 + (a-x)^2 = BD^2 = \dfrac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^2}$. Решая это уравнение, получим: $x = \dfrac{ab}{a+b}$ или $x = \dfrac{a^2}{a+b}$.

Тогда учитель задал классу такие вопросы:

1) Каким образом можно, не решая эту задачу, понять количество возможных ответов?

2) Как довести до конца решение на доске и выбрать из двух ответов верный?

3) Объясните, какой геометрический смысл имеет второй ответ и объясните, почему он был получен.

4) Придумайте решение, которое не приведёт к постороннему ответу.

Ответьте на эти вопросы.

Комментарий. 1) Понятно, что в этой задаче не может быть двух ответов. Объяснить это можно по-разному, например, представим себе, что мы построили такой вписанный квадрат. Если увеличить или уменьшить его сторону, то он перестанет быть вписанным.

2) Поменяв местами два катета, мы не изменим сторону вписанного квадрата. Значит ответ должен быть симметричен относительно длин катетов. Однако второй ответ этим свойством не обладает и не может быть верным.

3) Записывая теорему Пифагора для треугольника *BDE*, ученик никак не фиксирует катеты этого треугольника. Иными словами, неизвестная величина может (а при таком решении и должна) оказаться как стороной квадрата, так и длиной отрезка *BE*. Поэтому и получен второй ответ.

4) Первый способ. Из подобия треугольников *BDE* и *BAC*: $\dfrac{a-x}{a} = \dfrac{x}{b}$, тогда $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

Второй способ. По формуле $l = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, выражающей длину биссектрисы треугольника через длины сторон, между которыми она проведена, и угол между ними, получим: $CD = \dfrac{2ab}{a+b}\cos 45^\circ = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$; $x = \dfrac{CD}{\sqrt{2}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Использован фрагмент из книги В. Литцман, Ф. Трир Где ошибка? Математические парадоксы Петроград, «Научное издательство», 1919

Критерии проверки. *Баллы 1) – 4) суммируются.*

1) Приведено верное объяснение однозначности ответа – 2 балла

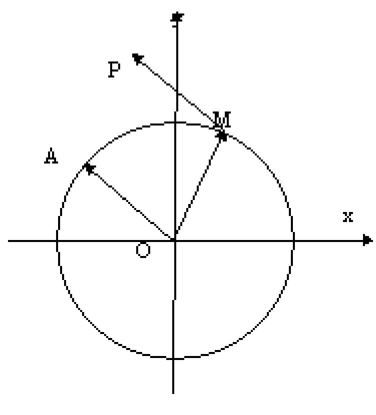
2) *Приведено верное обоснование отбора – 2 балла*

3) Приведено верное объяснение, откуда взялся второй ответ и каков его геометрический смысл – 3 балла

Указана только симметрия полученного учеником квадратного уравнения, откуда и взялся второй ответ, но его геометрический смысл не указан – 1 балл

4) Приведено верное решение, не приводящее к появлению посторонних решений – 2 или 3 балла (в зависимости от его рациональности)

9. Производные. *На уроке был предложен следующий «вывод» производных синуса и косинуса.*



Пусть точка *M* движется со скоростью 1 в положительном направлении по единичной окружности с центром в начале координат и радиусом 1 (см. рисунок). Тогда, согласно определению тригонометрических функций, *M*(cos*t*; sin*t*) в момент времени *t*. Вектор $\overline{MP}$ мгновенной скорости точки *M* направлен по касательной к окружности в точке *M*, поэтому он перпендикулярен *OM*. Отложим этот вектор от точки *O*: $\overline{OA} = \overline{MP}$. Тогда *OA* = 1 (так как точка движется со скоростью 1), то есть точка A лежит на окружности. При этом $OA \perp OM$, поэтому $A(\cos(t + \frac{\pi}{2}); \sin(t + \frac{\pi}{2}))$.

Используя формулы приведения, получим: $A(-\sin t; \cos t)$. Следовательно, $\overline{MP}(-\sin t; \cos t)$. Но координаты мгновенной скорости – это производная координаты точки, значит, $(\cos t)' = -\sin t$ и $(\sin t)' = \cos t$.

а) Содержит ли этот текст (сам по себе) какие-либо ошибки или неточности? Если «ДА», то укажите их.

б) Будем считать, что ошибки, если они есть, исправлены. Перечислите, что, на Ваш взгляд, надо обосновать и/или определить, чтобы этот «вывод» стал математически строгим.

в) Стандартный вывод производной синуса опирается на «первый замечательный предел». Обошлись ли мы без предела в данном случае?

Комментарий. а) Данный текст сам по себе корректен является красивой «физической» иллюстрацией производных синуса и косинуса, но не может претендовать на строгий вывод формул производных синуса и косинуса. Кроме того не указано, что точка движется по окружности с ***постоянной угловой*** скоростью и что ***модуль*** скорости равен 1.

б) Одна из проблем строгости «вывода» содержится во фразе: «Вектор $\overline{MP}$ мгновенной скорости точки M направлен по касательной к окружности в точке M» и в дальнейшем использовании перпендикулярности. Для того, чтобы это было обосновано, надо:

1) определить вектор скорости как производную вектор-функции;

2) обосновать, что касательная к окружности в данном случае соответствует определению касательной к произвольной кривой и при этом не воспользоваться производными синуса и косинуса (иначе возникнет «порочный круг»).

Другая проблема – в приведенном тексте подразумевается, что заданы параметрические законы движения точки: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, но это никак не обосновано. Поэтому непонятен переход от точки $M(\cos x, \sin x)$ в момент времени t к точке $A(\cos(t + \frac{\pi}{2}); \sin(t + \frac{\pi}{2}))$. Из указанной перпендикулярности следует только, что точка A в момент времени t имеет координаты $(\cos(x(t) + \frac{\pi}{2}), \sin(y(t) + \frac{\pi}{2}))$.

Отметим также, что приведенный «физический вывод» содержит неудачные моменты с точки зрения методики. В физике принято рассматривать «связанный» вектор, поэтому откладывание вектора скорости от точки О выглядит странно. Кроме того, единичную скорость отождествили с точкой на траектории (окружности единичного радиуса). Скорость и положение точки – величины разной размерности, которые вредно отождествлять и сравнивать на равенство. Поэтому отождествлять конец вектора единичной скорости с точкой на единичной окружности – методически плохо.

в) Пределы неизбежно возникнут, например, при определении касательной к кривой. Более того, обязательно «вылезет» первый замечательный предел», который обычно и используется при математически строгом выводе производной синуса.

Например, считая заданным закон движения $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, найдем квадрат модуля мгновенной скорости $\left|\vec{v}(t)\right|^2 = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\left(\frac{\cos(t+\Delta t)-\cos t}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t}\right)^2\right) =$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\left(\frac{2\sin\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}\right)^2\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{4\sin^2\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}\left(\sin^2\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)+\cos^2\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right)^2\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}\right)^2.$$

Таким образом, заданное значение модуля скорости равносильно использованию «первого замечательного предела».

Предложила Е. Гладкова

Критерии проверки. *Баллы а), б) и в) суммируются.*

а) Указано, что текст имеет право на существование и указана неточность – 2 балла
б) Верно указаны все фрагменты текста, требующие дополнительных обоснований – 5 баллов
в) В явном виде показана связь с «первым замечательным пределом» – 3 балла
Указано только, где именно может возникнуть предел – 1 балл

10. Одинаковые ответы. *Рассмотрим две задачи*:

Задача 1. Каким числом способов можно представить число 16 в виде суммы слагаемых 1 и 2? Представления, отличающиеся порядком слагаемых, – разные.

Задача 2. Вдоль аллеи расположены 15 скамеек. По аллее гуляют мизантропы. Иногда некоторые из них отдыхают на скамейках. Но на то они и мизантропы, чтобы не садиться не только вдвоём на одну и ту же скамейку, но даже и на соседнюю с занятой кем-то. Сколькими способами можно из всех 15 скамеек выбрать несколько таких, на которые согласятся сесть мизантропы? Можно выбрать и ноль скамеек.

а) Не решая ни одну из задач, докажите, что ответы у них одинаковые.

б) У двух задач ответы могут совпасть по разным причинам. Иногда это случайность, тогда говорить не о чем. Иногда задачи очевидно одинаковые (например, можно складывать яблоки с грушами, а можно овец с козами), тогда говорить тоже не о чем. Но иногда связь настолько глубокая, что стоит обсудить с учениками совпадение ответов в паре задач до или даже вместо решения этих задач.

Приведите две пары таких задач из разных разделов математики. Объясните в каждом случае причину совпадения ответов.

Комментарий. а) Первую задачу можно проиллюстрировать так. Положим в ряд 16 шаров. Между некоторыми шарами поместим капельку клея, такие шары образуют пару и соответствуют слагаемому 2. Требуется найти, сколькими способами в некоторые из 15 промежутков можно капнуть клей, если в два соседних промежутка капать клей запрещается? Будем проходить по очереди промежутки слева направо, каждый раз решая, капать ли клей. Но если только что капнули, то выбора нет, капать не надо.

Во второй задаче также будем двигаться слева направо от скамейки к скамейке, каждый раз решая, не посадить ли на эту скамейку мизантропа. Но если на предыдущую скамейку решили посадить, то выбора нет, скамейку надо оставить пустой.

Так как наличие или отсутствие выбора на очередном шаге в этих задачах определяется по одному и тому же правилу, то количество комбинаций получится одинаковым.

б) Приведем несколько возможных примеров.

Пример 1. Для каждого типа комбинаторных задач можно привести соответствующую пару или целую семью близнецов.

Задача 1. Пароль от Wi-Fi состоит из восьми цифр: нулей и единиц. За сколько времени можно наверняка подобрать пароль, если тратить на проверку каждого варианта по одной секунде?

Задача 2. Сколькими способами два разбойника могут разделить восемь различных монет между собой?

Задача 3. Сколькими способами можно представить число 9 как сумму нескольких натуральных слагаемых? Суммы с различным порядком слагаемых считаются разными.

Приведем два способа доказательства совпадения ответов.

Первый способ.. В первых двух задачах восемь раз подряд делается выбор: ставить 0 или 1 или отдать монету первому разбойнику или второму. А в третьей запишем девять единиц. В каждом из восьми промежутков снова делается выбор: ставить плюс или не ставить. Найдём все записанные суммы (например, 1 + 1 + 1 заменим на 3), после чего поставим + между получившимися числами. Одинаковым схемам выбора соответствуют одинаковые деревья перебора.

Второй способ. Запишем все возможные пароли на бумажках и будем их по одной выдавать разбойникам. Пусть они каждый раз кладут монеты в одном и том же порядке, а потом читают бумажку. Если написан 0, очередная монета достанется первому разбойнику, если 1, то второму. Когда разделят, заявить, что это была репетиция, и пусть делят заново по новому паролю. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством паролей и способами разделить монеты.

Отметим, что умение переводить комбинаторные задачи с одного языка на другой, пожалуй, главное, чему следует учить в комбинаторике.

Пример 2. Одинаковость задач иногда видна, если по условию каждой из них изобразить граф. Рассмотрим такие две задачи.

Задача 1. Фотографирование для выпускного альбома учеников одного класса занимает ровно один урок. На первом уроке удобно фотографировать 11Г или 11Д, на втором – 11А, 11Б или 11Г. Три класса: 11А, 11Б и 11В можно фотографировать на пятом уроке. 11В готов также фотографироваться на 4 уроке, а 11Д – на третьем. Составьте удобный для всех график.

Задача 2. В группе детского сада решили поставить на сцене сказку «Колобок».
– Я буду Колобком! – решительно заявил Гена.
– Нет, Колобком буду я, – захныкал Дима.
– Я согласен быть Лисой, – уступил Гена и тихо добавил, – и тебя съесть.
– А я Волком, – почуяв неладное, предложил Дима.
– Я хочу играть Зайца или Медведя, – сказал Вова.
– Нет, Медведем буду я, – хором закричали Алик и Боря.
– Или Лисой, --- добавили они одновременно.
Как распределить роли так, чтобы все дети были довольны?

Изобразим условие задачи 1 в виде двудольного графа. Запишем рядом два столбика: первый – с номерами уроков, второй – с буквами классов. Если классу удобно фотографироваться на уроке с каким-то номером, соединим букву класса отрезком с номером урока.

Если во второй задаче записать в один столбик роли, а в другой исполнителей и соединить отрезками детей с ролями, которые они хотели бы играть, получится точно такой же граф. Имена детей как раз начинаются на буквы А, Б, В, Г и Д. А вместо номеров уроков 1, 2, 3, 4 и 5 в графе появятся в соответствующем порядке Колобок, Лиса, Волк, Заяц и Медведь (достаточно первых букв).

Пример 3. Логические задачи.

Задача 1. Три мальчика нашли в море старинную амфору. Один сказал, что ее изготовили финикийцы в V веке до н. э., второй – что она сделана греками в III веке до н. э., а третий сказал, что амфора не греческая, а изготовлена в IV веке до н. э. В музее ребятам объяснили, что каждый из них прав ровно наполовину. В каком веке и каким народом изготовлена амфора?

Задача 2. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?

Одинаковость задач можно установить на стадии чтения условия, заменяя одни слова другими: финикийская $\leftrightarrow$ чёрная, греческая $\leftrightarrow$ синяя и т. п.

Пример 4. Рассмотрим две математические игры.

Задача 1. На клетке e8 шахматной доски стоит ферзь. За ход разрешается сдвинуть его на сколько угодно клеток влево, вниз, или влево и вниз на одинаковое число клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 2. В одной кучке 5 камней, в другой – 7 камней. Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять любое число камней из первой кучки, или из второй, или из обеих сразу, но тогда обязательно поровну. Выигрывает тот, кто взял последний камень. Кто выигрывает при правильной игре?

Пронумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски цифрами от 0 до 7. Тогда каждая клетка с некоторыми координатами соответствует позиции в игре с таким же числом камней в кучках, а ходы ферзя – разрешённым действиям с камнями. Взять последний камень соответствуют загону ферзя в угол, после чего у соперника нет ходов.

Кроме того, существуют примеры задач непосредственно из школьной программы. Например, текстовые задачи на встречное движение легко переводятся на язык совместной работы (деятельности): ходьба со скоростью 5 км/ч соответствует шитью 5 платьев в день или поеданию 5 ложек варенья за час, и т. п.

Предложила И. Раскина

Критерии проверки. *Баллы а) и б) суммируются.*

а) Приведено верное объяснение совпадения ответов – 4 балла

б) Приведены два верных примера из разных разделов математики и верно обосновано совпадения ответов в каждом из них – 6 баллов

Приведены два верных примера из одного раздела математики и верно обосновано совпадения ответов в каждом из них – 4 балла

Приведен один верный пример, в котором верно обосновано совпадения ответов – 3 балла