XVI Творческий конкурс учителей математики
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

№1. Вычисление корней. Ученик предложил новый способ для вычисления корней и привёл два примера: $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$ и $\sqrt{12\frac{12}{143}} = 12\sqrt{\frac{12}{143}}$. Приведите еще один аналогичный пример.

Ответ: например, $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Примеры, приведённые учеником, являются частными случаями равенства $\sqrt{n\frac{n}{n^2-1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$, *где n – натуральное число, отличное от 1. Оно справедливо, так как* $\sqrt{n\frac{n}{n^2-1}} = \sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$. *Поэтому пример получается подстановкой в это равенство любого натурального числа кроме 1.*

В. Литцман, Ф. Трир. Где ошибка?
Математические парадоксы. Петроград, «Научное издательство», 1919

Критерии проверки.

Приведён любой верный пример – 10 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. Ребус. Сколько решений имеет ребус П < О < Д < У < М < А > Й, где разными буквами обозначены разные цифры?

Ответ: 720.

Решение. Количество способов выбрать семь цифр из десяти равно $C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$. В каждой семёрке цифр А – наибольшая, а Й – любая из остальных шести. После выбора А и Й остальные пять цифр определяются однозначно: они в порядке возрастания соответствуют буквам П, О, Д, У и М. Таким образом, ребус имеет 120·6 = 720 решений.

А. Шаповалов

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка – 5 баллов
Выбрано верное направление рассуждений, но решение до конца не доведено – 2 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Сумма. Пусть $P(n)$ – произведение ненулевых цифр числа n. Найдите сумму: $P(1) + P(2) + ... + P(2019)$.

Ответ: 194855.

Решение. Первый способ. Доопределим $P(n)$ для нуля: $P(0) = 1$. Добавим слагаемое $P(0)$ в начало и найдём сумму первых десяти слагаемых: $P(0) + P(1) + P(2) + \ldots + P(9) = 1 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 46$.

Перейдём к сумме первых 100 слагаемых. $P(0) + P(1) + \ldots + P(99) = (1 + 1 + \ldots + 9) + 1(1 + 1 + \ldots + 9) + 2(1 + 1 + \ldots + 9) + \ldots + 9(1 + 1 + \ldots + 9) = (1 + 1 + \ldots + 9)^2 = 46^2$ (изначально суммируем по десяткам, вынося цифры десятков за скобки).

Аналогично, суммируя по сотням и вынося за скобки цифры из разряда сотен, получим: $P(0) + P(1) + \ldots + P(999) = (P(0) + P(1) + \ldots + P(99)) + 1(P(0) + P(1) + \ldots + P(99)) + 2(P(0) + P(1) + \ldots + P(99)) + \ldots + 9(P(0) + P(1) + \ldots + P(99)) = 46^3$.

Далее, $P(1000) + P(1001) + \ldots + P(1999) = P(0) + P(1) + \ldots + P(999) = 46^3$.

Кроме того, $P(2000) + P(2001) + \ldots + P(2019) = 2(P(0) + P(1) + \ldots + P(19)) = 2\cdot 2\cdot 46$.

Таким образом, искомая сумма равна $2\ 46^3 + 2\cdot 2\cdot 46 = 92(46^2 + 2) = 92\cdot 2118 = 194856$. Осталось вычесть добавленное слагаемое $P(0) = 1$.

Второй способ. Обозначим через s сумму $P(1) + P(2) + \ldots + P(9) = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Заметим, что $P(1001) + \ldots + P(1999) = P(1) + \ldots + P(999)$. Покажем, как вычислить сумму $P(1) + \ldots + P(999)$. Представим каждое число от 1 до 999 в виде клетки трехмерной таблицы $10\times 10\times 10$, где по осям координат откладываются цифры в разряде единиц, десятков и сотен соответственно. Запишем в каждую клетку таблицы произведение ее ненулевых координат (в клетку (0, 0, 0) запишем 0). Тогда сумма чисел в полученной таблице равна $\sum\limits_{i,j,k=1}^{9} ijk + 3\sum\limits_{i,j=1}^{9} ij + 3\sum\limits_{i=1}^{9} i = \left(\sum\limits_{i=1}^{9} i\right)^3 + 3\left(\sum\limits_{i=1}^{9} i\right)^2 + 3\left(\sum\limits_{i=1}^{9} i\right) = (s+1)^3 - 1.$

Отдельно вычислим, что $P(1000) + P(2000) + P(2001) + \ldots + P(2019) = 1 + 2((1 + s) + (1 + s)) = 4s + 5$.

Таким образом, искомая сумма равна $2((s + 1)^3 - 1) + 4s + 5 = 2(s + 1)^3 + 4s + 3 = 194855$.

Фольклор

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ в виде числа – 10 баллов

Приведено полное обоснованное решение, вычислительных ошибок нет, но ответ дан в виде суммы или произведения – 9 баллов

Приведено обоснованное решение, но допущена неточность при вычислении в третьей тысяче – 9 баллов

Верный ход решения, но допущена неточность при вычислении во второй тысяче – 7 баллов

Верно и обоснованно вычислена сумма в первой тысяче, но в логике дальнейшего подсчёта есть ошибка – 4 балла

Приведен только верный ответ – 1 балл

Ошибка допущена уже на начальном этапе подсчёта – 0 баллов

Задача не решена – 0 баллов

№4. Одиночные точки. Пусть $Q_n(x)$ – многочлен степени n. Назовем точку x_0 двойственной, если существует такая точка x_1, что касательные, проведенные в точках графика $y = Q_n(x)$ с абсциссами x_0 и x_1, взаимно перпендикулярны. В противном случае назовем точку x_0 одиночной. Докажите, что у любого многочлена существуют одиночные точки, причём при чётном n количество одиночных точек конечно, а при нечётном n – бесконечно.

Решение. Воспользуемся тем, что любой многочлен непрерывен и дифференцируем на своей области определения. Пусть старший коэффициент многочлена $Q_n(x)$ положителен. (*Случай отрицательного коэффициента разбирается аналогично*). Чтобы точка x_0 была двойственной, необходимо выполнение условия $Q'(x_0)\cdot Q'(x_1) = -1$. Значит, если $Q'(x_0) = 0$, то x_0 – одиночная.

Пусть n – четное число. Тогда $Q'(x)$ – многочлен нечётной степени, множество значений которого – все действительные числа, то есть одиночные точки существуют. Пусть точка $\tilde{x}_0$ такова, что $Q'(\tilde{x}_0) \neq 0$. Тогда найдется точка $\tilde{x}_1$ такая, что $Q'(\tilde{x}_1) = -\dfrac{1}{Q'(\tilde{x}_0)}$, и, значит, & будет двойственной. Следовательно, одиночными будут только те точки, для которых $Q'(x)=0$, а их конечное число по основной теореме алгебры.

Пусть n – нечётное число. При n > 1 $Q'(x)$ – многочлен чётной степени, его множество значений $[m;+\infty)$. Если $m \geq 0$, то любая точка является одиночной. А если m < 0, то точки x_0, для которых $Q'(x_0)\in\left[0;\frac{1}{|m|}\right)$, являются одиночными, а их количество бесконечно. При n = 1 $Q'(x)$ = c > 0, поэтому все точки $Q_n(x)$ являются одиночными.

А. Иванищук

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов
Верное обоснованное решение, но не рассмотрен случай, когда n = 1 – 9 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Полностью разобран только случай нечётного n – 6 баллов
Полностью разобран только случай чётного n – 2 балла
Доказано только существование одиночных точек в обоих случаях – 1 балл
Рассмотрены только отдельные значения n – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№5. Серединный перпендикуляр. На окружности зафиксированы две точки A и B. Точка C движется по окружности так, что треугольник ABC – остроугольный. Точки E и F – проекции середины отрезка AB на прямые AC и BC. Докажите, что серединный перпендикуляр к EF проходит через фиксированную точку.

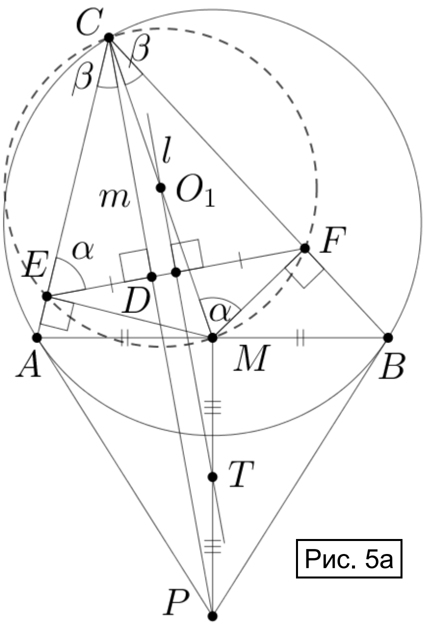


Рис. 5а

Решение. Пусть l – серединный перпендикуляр к отрезку EF, M – середина AB, касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и B пересекаются в точке P (см. рис. 5 а, б).

Первый способ. Проведём через вершину C прямую m параллельно прямой l, D –точка её пересечения с EF (см. рис. 5а). Докажем, что прямая m содержит точку P. Согласно характеристическому свойству симедианы, для этого достаточно доказать, что m содержит симедиану треугольника ABC, то есть m симметрична прямой CM относительно биссектрисы угла C.

Пусть $\angle FMC=\alpha$, $\angle FCM=\beta$, тогда $\alpha+\beta=90^\circ$. Так как четырехугольник $CFME$ – вписанный, то $\angle FEC=\angle FMC=\alpha$. Тогда из прямоугольного треугольника CED получим, что $\angle ECD=\beta$, то есть CD и CM симметричны относительно биссектрисы угла C, что и требовалось.

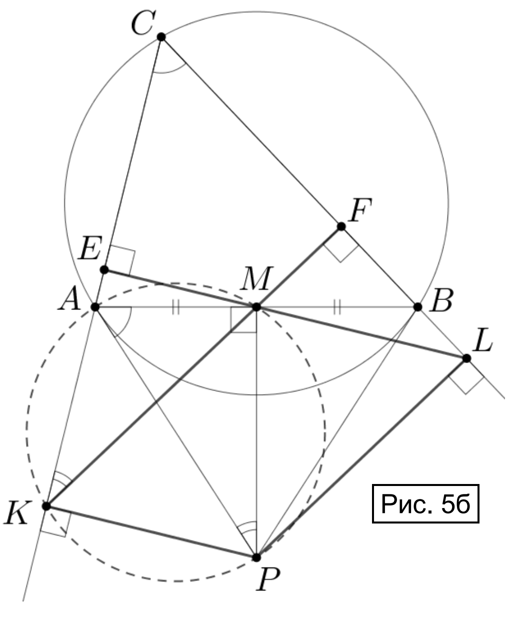


Рис. 5б

Пусть O_1 – центр описанной окружности треугольника CEF, тогда CM – диаметр этой окружности, O_1 – середина CM. Так как l – серединный перпендикуляр к хорде EF, то l содержит точку O_1. Рассмотрим треугольник CMP, в котором точки M и P фиксированы (не зависят от положения точки C, указанного в условии). По доказанному выше, прямая l проходит через середину его стороны CM и $l\parallel CP$. По теореме Фалеса все такие прямые l пересекают фиксированный отрезок *PM* в его середине – точке *T*, которая также фиксирована.

Второй способ. Пусть прямые *FM* и *EM* пересекают *CA* и *CB* в точках *K* и *L* соответственно (см. рис. 5б). Из треугольника *CKF*: $\angle CKF = 90^\circ - \angle C$, а $\angle MAP = \angle C$ по теореме об угле между касательной и хордой. Учитывая, что $PM \perp AB$, получим: $\angle APM = 90^\circ - \angle MAP = 90^\circ - \angle C = \angle AKM$. Значит, точки *A*, *M*, *P* и *K* лежат на одной окружности. Так как $\angle AMP = 90°$, то $\angle AKP = 90°$.

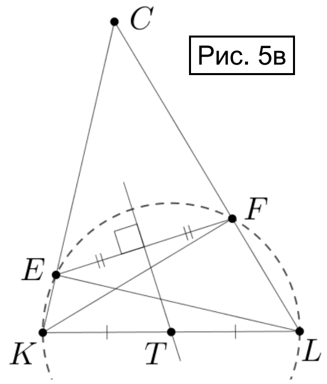


Рис. 5в

Таким образом, $PK \perp AC$ и $LE \perp AC$, значит, $PK \parallel LE$. Аналогично доказывается, что $PL \| KF$. Следовательно, *PKML* – параллелограмм. Кроме того, точки *K*, *E*, *F* и *L* лежат на окружности с диаметром *KL* (см. рис. 5в). Так как *EF* – хорда этой окружности, то серединный перпендикуляр l к отрезку *EF* проходит через центр *T* этой окружности, где *T* – середина *KL*. Следовательно, точка *T* – точка пересечения диагоналей параллелограмма *PKLM*, то есть *T* – середина *PM.* Так как точки *P* и *M* фиксированы, то точка *T*, лежащая на прямой l, также фиксирована, что и требовалось доказать.

Фольклор

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Присутствуют верные идеи, но рассуждение не доведёно до конца – 3 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

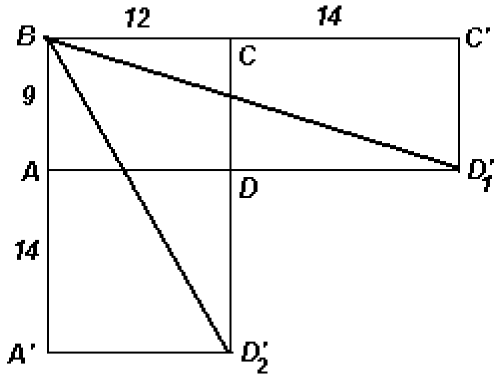
Решения некоторых участников представляли собой счёт в комплексных числах. По «олимпиадной традиции» такие решения засчитывались только в случае, если они не содержали вычислительных ошибок, и все использованные формулы были обоснованы..

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№6. **Параллелепипед**. «Задача». Муха ползет по поверхности прямоугольного параллелепипеда с основанием 9×12 и высотой 14 из вершины нижнего основания в противоположную вершину верхнего основания. Докажите, что длина её пути будет не меньше чем 25,5.

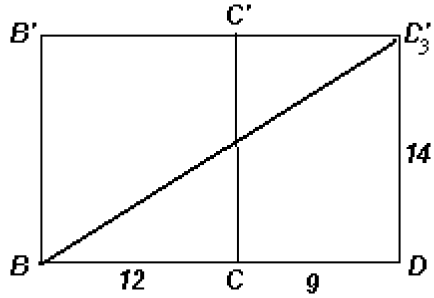
«Решение». Пусть муха ползет из вершины *B* параллелепипеда *ABCDA'B'C'D'* в вершину *D'*. Если она будет ползти по ребрам параллелепипеда, то длина ее пути составит 9 + 12 + 14 > 25,5.



Пусть муха ползет по граням. Рассмотрим развертку трех граней параллелепипеда (см. рисунок). Кратчайший путь мухи будет соответствовать одному из отрезков BD'_1 или BD'_2. Но $BD'^2_1 = 9^2 + 26^2 = 757$ > 650,25 = 25,5^2 и $BD'^2_2 = 12^2 + 23^2 = 673$ > 650,25 = 25,5^2, что и требовалось доказать.

Комментарий. Утверждение задачи неверно, неверно и её решение. Во-первых, отдельно разбирать случай движения мухи по рёбрам не требуется, так как ребро принадлежит обеим граням, пересечением которых оно является. Во-вторых, у мухи есть три варианта движения она может пересекать ребро длины 9, ребро длины 12 или же ребро длины 14. Первые два варианта в «решении» разобраны, а третий упущен. В нём кратчайший путь мухи будет соответствовать отрезку BD'_3 (см. рис. 6). При этом, $BD'^2_3 = 21^2 + 14^2 = 637$ < 650,25 = $25{,}5^2$, так что оптимальный путь короче, чем 25,5.

Рис. 6



Предложила Т. Соколова

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Объяснено, почему не требовалось рассматривать путь по рёбрам – 2 балла
Указано, какой случай не рассмотрен в «решении» – 2 балла
Верно рассмотрен недостающий случай – 5 баллов
Указано, что утверждение задачи неверно – 1 балл

№7. **Сумма и разность**. «Задача». На доске записаны числа 1, 2, ..., 101. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы для любых двух оставшихся чисел *a* и *b* сумма *a* + *b* не делилась на *a* – *b*?
«Ответ»: 75.
«Решение». Если для двух оставшихся чисел *a* > *b* выполнено *a* – *b* = 1 (т.е. эти числа соседние), то условие, очевидно, нарушается. Таким образом, среди оставшихся чисел нет соседних. Следовательно, каждое второе число нужно вычеркнуть. Большее количество чисел останется, если мы вычеркнем четные числа и оставим нечетные: 1, 3, 5, ..., 101. Далее, если для двух оставшихся чисел *a* > *b* выполнено *a* – *b* = 2, то *a* + *b* делится на *a* – *b*, что противоречит условию. Тем самым, мы должны из ряда 1, 3, 5, ..., 101 вычеркнуть каждое второе число. Оставшийся ряд из 26 чисел: 1, 5, 9, ... , 101 удовлетворяет условию, поскольку любая разность *a* – *b* делится на 4, но никакая сумма не делится на 4 (она дает остаток 2 при делении на 4).

Комментарий. «Решение» и «ответ» неверны. Из того, что среди оставшихся чисел нет соседних, не следует, что каждое второе число нужно вычеркнуть. Такое «решение» служит примером некорректного применения «жадного алгоритма» и показывает, что наиболее выгодное действие на каждом этапе не всегда приводит к наилучшему результату в итоге. Приведем верное решение.

Ответ. 67.

Оценка. Докажем, что любые два оставшихся числа отличаются не менее, чем на 3. Действительно, если *a* – *b* = 1, то *a* + *b* делится на *a* – *b*. Если же *a* – *b* = 2, то числа *a* и *b* имеют одинаковую чётность, поэтому их сумма чётная, то есть и в этом случае *a* + *b* делится на *a* – *b*. Таким образом, с учётом «краевого эффекта» из 101 числа можно оставить не более, чем 34, то есть вычеркнуть не менее, чем 67.

Пример. Оставим 34 числа, делящиеся на 3 с остатком 1: 1, 4, 7, ..., 100. Сумма любых таких чисел при делении на 3 даёт остаток 2, а разность кратна 3, поэтому сумма *a* + *b* не делится на разность *a* – *b*.

Предложил П. Кожевников

Критерии проверки (*баллы за 1) и 2) суммируются*).
1) Верно объяснена суть допущенной ошибки – 5 баллов
Указано только, что не доказана оценка – 3 балла
2) Приведено полное верное решение и получен верный ответ – 5 баллов
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка – 4 балла
Приведены только верный ответ и пример – 2 балла
Приведён только ответ – 0 баллов

№8. Площадь. Школьник доказывает формулу площади параллелограмма $S = ah_a$. Сначала он доказывает соответствующую формулу площади треугольника, а потом разбивает параллелограмм диагональю на два равных треугольника. Доказывая формулу для треугольника, он опускает высоту, которая лежит внутри треугольника, после чего опирается на формулу площади прямоугольника. Вопрос экзаменатора: «А если высота лежит вне треугольника?» Тогда школьник доказывает, что найдется высота треугольника, которая лежит внутри него.

Доказал ли школьник формулу площади параллелограмма? Обоснуйте.

Комментарий. Не доказал, так как не доказана формула площади треугольника. Действительно, для этого надо доказать, что площадь треугольника равна половине произведения ***любой*** стороны и проведенной к ней высоты.

Предложила Н. Нетрусова

Отметим, что некоторые участники писали, что формула площади треугольника доказана для частного случая, а это неверно. Она вообще не доказана, так как из приведённого рассуждения не следует её единственность.

Отметим также, что от участников конкурса требовалось объяснить суть логической ошибки в рассуждениях школьника, а не предложить школьнику верные рассуждения.

Критерии проверки.

Верно объяснено, что формула площади параллелограмма не доказана потому, что не доказана формула площади треугольника, и верно указана ошибка в доказательстве формулы площади треугольника – 10 баллов

Указано, что ошибка школьника состоит в том, что он не доказал формулу площади треугольника для случая, когда высота падает на продолжение стороны – 8 баллов

Не указано в явном виде, что формулу площади треугольника школьник не доказал, а есть отсылки к тому, что бывают параллелограммы, в которых высота падает не на сторону, а на продолжение стороны – 4 балла

В рассуждениях участника содержатся неверные математические утверждения — 0 баллов

Указано только, что школьник формулу не доказал – 0 баллов

№9. **Кефир**. *Ученик рассказал учителю задачу, полученную им на олимпиаде, привёл своё решение и спросил, верно ли оно*.

Задача. Паниковскому приснилось, что он получил 1 000 000 рублей на блюдечке с голубой каемочкой. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и сразу на все имеющиеся деньги купил кефир. В дальнейшем он поступал так же до тех пор, пока денег хватало хотя бы на одну бутылку. При этом он заметил, что между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Паниковский во сне?

Ответ: 166 666.

Решение ученика. Надо проводить расчёт в пустых бутылках, так как в этой «валюте» цена кефира не изменяется. Кефир «нетто» стоит 6 бутылок, так что полученных денег хватит на 1 000 000 : 6 = 166 666 бутылок кефира и еще 4 пустых бутылки останутся.

Обоснованно ответьте на вопросы а) и б) и выполните задание в).

а) Как, не производя вычислений, объяснить ученику, что его решение неверное?

б) Можно ли без дополнительных вычислений, а только на основе соображений, приведённых в пункте а), наверняка сказать, верен ли ответ, полученный учеником?

в) Учитель мог сказать ученику: «Если ты рассуждал верно, то, получив 1000 рублей, Паниковский смог бы купить 166 бутылок кефира. А теперь подсчитай, сколько он смог бы купить на самом деле». Приведите верное решение задачи в таком (упрощённом) виде..

Комментарий. а) Кефир «нетто», действительно, всегда стоит 6 пустых бутылок, то есть деньги, вложенные в бутылки, от инфляции спасены. Но каждый раз у Паниковского остаётся ещё несколько рублей, покупательная способность которых к следующему посещению магазина уменьшается вдвое.

б) Доля не защищённых от инфляции денег мала, поэтому совсем без вычислений нельзя наверняка предсказать, верен ли ответ ученика. Возможно, Паниковский всё же смог купить и выпить 166 666 бутылок кефира, но у него осталось меньше пустых бутылок и/или денег. Но не исключено, что из-за инфляции бутылок он смог купить немного меньше, чем 166 666.

Жюри не поленилось подсчитать, что на самом деле он смог купить 166 664 бутылки, то есть решение ученика даёт совсем небольшую ошибку.

в) Составим для Паниковского «бухгалтерскую книгу»:

1) Бутылка кефира стоит 7 рублей, пустая – 1 рубль. Есть 1000 рублей. Купил 142 бутылки, осталось 6 рублей .

2) Бутылка кефира стоит 14 рублей, пустая - 2 рубля. Сдал 142 бутылки. Есть 290 рублей. Купил 20 бутылок, остались 10 рублей.

3) Бутылка кефира стоит 28 рублей, пустая - 4 рубля. Сдал 20 бутылок. Есть 90 рублей. Купил 3 бутылки, остались 6 рублей.

4) Бутылка кефира стоит 56 рублей, пустая - 8 рублей. Сдал 3 бутылки. Есть 30 рублей. Купить ничего нельзя.

Всего Паниковский смог выпить 142 + 20 + 3 = 165 бутылок кефира.

Задача действительно была на олимпиаде, а именно на II этапе ВОШ в р. Татарстан в 2014/15 учебном году.

Предложил Р. Алишев

Критерии проверки (*баллы за а) – в) суммируются*).

а) Верно объяснена суть допущенной учеником ошибки – 4 балла

Приведены вычисления на небольших числах – 1 балл

Приведены только соображения, что нельзя купить кефир без бутылки, например, за 6 рублей (в данном случае, бутылки в остатке есть, поэтому такой проблемы не возникает) – 1 балл

б) Верно объяснено, почему без вычислений оценить ответ ученика нельзя – 3 балла

Приведён ответ «нельзя», но пояснения существенно недостаточны (например, приведен конкретный пример в котором ответ по способу ученика совпадает с верным – 1 балл

в) Приведено верное решение и получен верный ответ – 3 балла

Верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка – 1 балл

Приведён только верный ответ – 1 балл

№10. Неравенство. Придумайте неравенство, решением которого является объединение полуинтервала и отдельной точки, а в процессе решения необходимо сравнить два иррациональных числа с одинаковой целой частью. Одно число – корень полного квадратного уравнения с целыми коэффициентами, а второе должно иметь вид $\log_a b$. Запишите решение этого неравенства.

Комментарий. Приведём один из возможных примеров: $\dfrac{(x^2+2x-6)\sqrt{3^x-4}}{x-2} \le 0$.

Решение. Воспользуемся методом интервалов. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{(x^2+2x-6)\sqrt{3^x-4}}{x-2}$. Её область определения: *D*(*f*) = $[\log_3 4; 2) \cup (2; +\infty)$ и $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точках *D*(*f*). Корни квадратного трёхчлена: $-1 \pm \sqrt{7}$.Так как $-1-\sqrt{7} < 0 < \log_3 4$, то это число не принадлежит *D*(*f*). Так как $\sqrt{7} > \sqrt{6{,}25}$ = 2,5, то $-1+\sqrt{7}$ > 1,5; $\log_3 4 < \log_3 3\sqrt{3}$ = 1,5. Следовательно, $-1+\sqrt{7}$ > $\log_3 4$. Таким образом, $f(x) = 0$ при $x = -1+\sqrt{7}$ или $x = \log_3 4$.

Учитывая, что $-1+\sqrt{7}$ < 2 получим: на промежутках $\left(\log_3 4;-1+\sqrt{7}\right)$ и $\left(2;+\infty\right)$ $f(x)$ > 0, а на промежутке $\left(-1+\sqrt{7};2\right)$ $f(x)$ < 0. Таким образом, **ответ**: $\left[-1+\sqrt{7};2\right)\cup\{\log_3 4\}$.

Как можно рассуждать, чтобы придумать требуемое неравенство? Оно должно быть нестрогим и удобно, чтобы в правой части стоял 0. Так как в ответе мы должны получить полуинтервал, то естественно в левой части поставить такую алгебраическую дробь, чтобы концами полуинтервала были нули числителя и знаменателя. Для того, чтобы в процессе решения появилось число вида $\log_a b$*, в левой части неравенства должно быть выражение вида* $a^x - b$*. Отдельная точка может появиться в ответе в различных случаях, но самый типичные из них такие: в левой части неравенства есть множитель, либо в виде в четной степени многочлена, либо в виде квадратного корня, причём он должен обращаться в ноль в точке, которая является границей интервала, который не будет решением неравенства. В приведённом примере реализован второй случай и использована такая структура левой части неравенства, чтобы она содержала полный квадратный трехчлен. После этого подбираются числовые значения так, чтобы выполнить условие задания о сравнении иррациональных чисел с одинаковой целой частью. Это сравнение можно осуществлять различными способами, но один из наиболее естественных способов – это подобрать иррациональные числа, которые разделяются рациональным числом (в приведённом примере корень квадратного трёхчлена и число вида* $\log_a b$ *разделяются числом 1,5). Для того, чтобы коэффициенты полного квадратного трёхчлена были целыми, его второй корень должен быть числом, сопряжённым первому. Сами коэффициенты находим, используя теорему Виета.*

Понятно, что возможны и другие примеры, и иной ход рассуждений. Отдельно отметим, что полуинтервал является ограниченным множеством, поэтому приводить неравенство, решением которого является объединение точки и луча, не вполне корректно.

Предложил Д. Шноль

<u>Критерии проверки</u>

Приведены неравенство, полностью удовлетворяющее условию, и его решение – 10 баллов

Приведено неравенство, полностью удовлетворяющее условию, но его решение содержит вычислительную ошибку – 8 баллов

Приведено неравенство, полностью удовлетворяющее условию, но его решение неполное (не проведено сравнение иррациональных чисел) – 8 баллов

Приведено и верно решено неравенство, но его ответом является объединение точки и луча – 7 баллов

Приведено неравенство, полностью удовлетворяющее условию, но его решение отсутствует – 6 баллов

Приведено и решено неравенство, в котором ответом является объединение полуинтервала и отдельной точки, но одно из дополнительных условий не выполнено – 3 балла

Описана только идея составления требуемого неравенства в общем виде – 2 балла

Приведено и решено неравенство, в котором ответом является объединение полуинтервала и отдельной точки, но не выполнено более одного из дополнительных условий – 1 балл