XVII Творческий конкурс учителей по математике
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

№1. Социальная дистанция. Два человека стоят посередине полосы шириной 2 метра на расстоянии 5 метров друг от друга. Смогут ли они поменяться местами, пройдя в сумме не более двенадцати метров и соблюдая социальную дистанцию (в любой момент расстояние между ними не должно быть меньше, чем 1,5 метра, и они всегда должны находиться внутри полосы)?

Фольклор, предложил А. Грибалко

Ответ: смогут.

Решение. Существует много различных способов реализации требуемого. Приведём два из них.

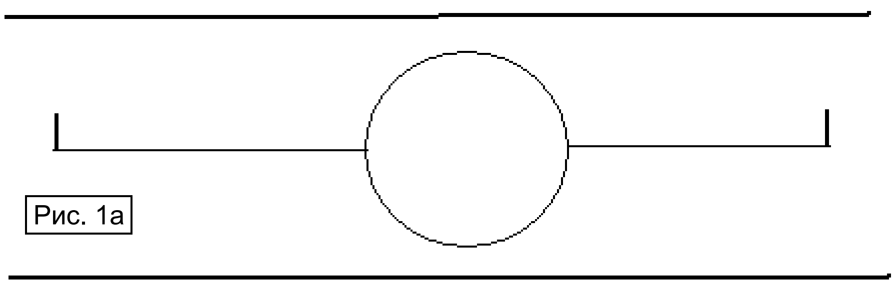


Рис. 1а

Первый способ. Пусть они двигаются по прямой навстречу друг другу до тех пор, пока расстояние между ними не станет равным 1,5 метра. Затем они двигаются с равными скоростями по окружности диаметра 1,5 метра: один – по «верхней» полуокружности, другой – по «нижней» (см. рис. 1а). Тем самым социальная дистанция сохраняется. После этого они расходятся и меняются местами. В этом случае, в сумме будет пройдено $3{,}5 \cdot 2 + \pi \cdot 1{,}5 = 7 + 1{,}5\pi < 7 + 1{,}5 \cdot 3{,}2 = 11{,}8 < 12$ метров.

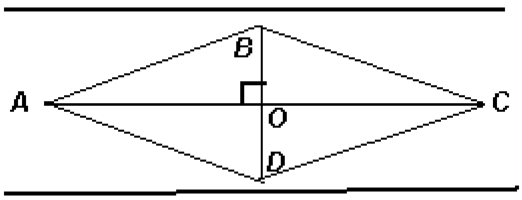


Рис. 1б

Второй способ. Пусть точки A и C – исходные положения двух людей. Рассмотрим ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, $AC = 5$ м, $BD = 1{,}8$ м (см. рис. 1б). Покажем, что если один человек движется по ломаной ABC, а другой – по ломаной CDA так, чтобы всё время находиться на противолежащих сторонах ромба, то условие задачи будет выполнено.

Действительно, площадь ромба $S = 0{,}5AC \cdot BD = 4{,}5$ (м^2), а его сторона $a = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 0{,}9^2} = \sqrt{7{,}06} < 2{,}7$ (м). Следовательно, высота ромба $h = \frac{S}{a} = \frac{4{,}5}{\sqrt{7{,}06}} > \frac{4{,}5}{2{,}7} = \frac{5}{3} > 1{,}5$ (м). Значит, при движении указанным образом социальная дистанция сохраняется. При этом, суммарная длина пройденного пути меньше, чем $2{,}7 \cdot 4 = 10{,}8 < 12$ метров.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведены верный пример и верные расчёты, но не указаны ограничения по движению относительно друг друга – 8 баллов

Приведено в целом верное решение, но вместо неравенств использованы приближённые значения – 8 баллов

Приведен верный пример, но допущена вычислительная ошибка, не повлиявшая на ответ – 6 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. Функция. Петя придумал новую функцию *f(x)* = #*x*#, определенную для всех *x*, кроме нуля. По определению #*x*# = *n*, если $n \le \frac{1}{|x|} < n+1$ и *n* – целое число. Изобразите на координатной плоскости и опишите словами множество всех точек, координаты которых удовлетворяют условию: #*x*# = #*y*#.

Д. Шноль

Ответ: см. рис. 2.

Решение. Функция *f(x)* = #*x*#, из определения, существует только для неотрицательных *n*. Уравнение #*x*# = #*y*# содержит условия, зависящие от $|x|$ и $|y|$, поэтому множество искомых точек будет симметрично относительно координатных осей и начала координат.

Поэтому достаточно рассмотреть точки в первой координатной четверти. Искомое множество представляет собой объединение множеств #*x*# = #*y*# = *k*, где *k* = 0, 1, 2, 3, … .

При *k* = 0 $\begin{cases} 0 \le \frac{1}{x} < 1 \\ 0 \le \frac{1}{y} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$, что даёт прямой угол с исключенными границами.

При $k \in N$ $\begin{cases} k \le \frac{1}{x} < k+1 \\ k \le \frac{1}{y} < k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k+1} < y \le \frac{1}{k} \end{cases}$, что дает объединение бесконечного количества квадратов со сторонами $\frac{1}{k(k+1)}$. Одна из диагоналей каждого квадрата лежит на прямой *y* = *x*, соседние квадраты имеют общую вершину, левая и нижняя стороны квадратов не принадлежат искомому множеству.

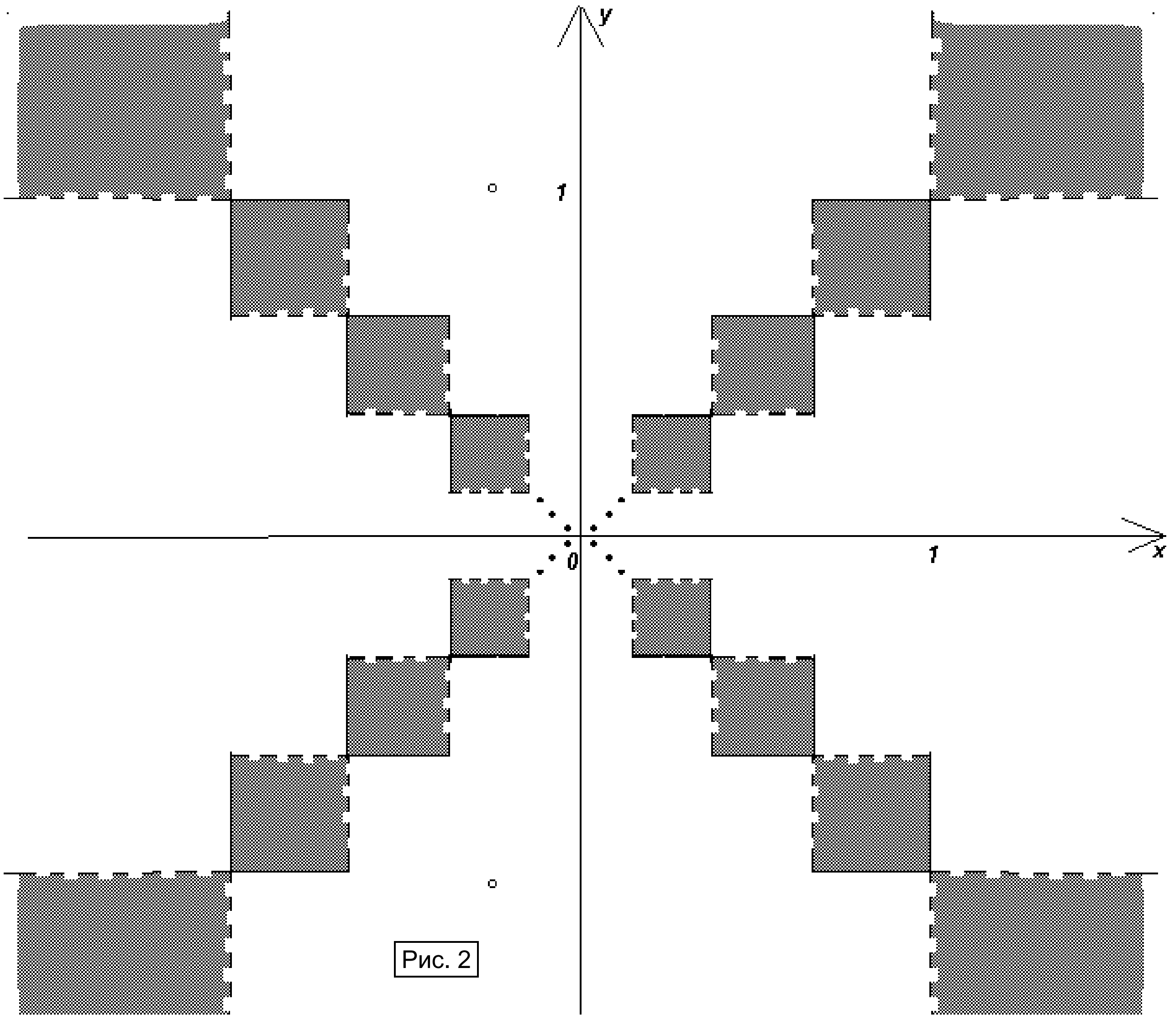


Рис. 2

Заданную функцию можно также записать в виде $f(x)=\left[\frac{1}{|x|}\right]$, тогда искомое множество точек задаётся уравнением $\left[\frac{1}{|x|}\right]=\left[\frac{1}{|y|}\right]$, где [z] – целая часть числа z.

Критерии проверки.

Приведены полное обоснованное решение, получен верный ответ (изображение и описание) – 10 баллов

Верно изображены искомые области, но решение недостаточно обосновано – 8 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, но есть неточности в изображении или описании искомого множества – 7-8 баллов

Присутствует верная идея решения, но оно не доведено до конца – 2-3 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Неравенство. Для положительных x, y и z докажите неравенство:
$4xyz(x + y + z) \le (y + z)^2(x + z)^2$.

Г. Вольфсон

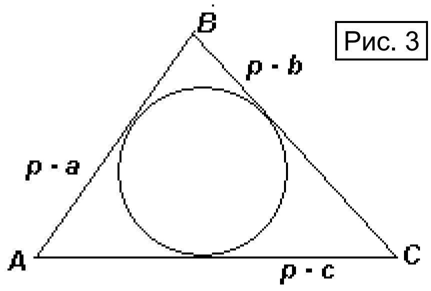


Рис. 3

Решение. Первый способ. Рассмотрим треугольник со сторонами a, b и c. Пусть x, y и z – расстояния от его вершин до точек касания сторон с вписанной в треугольник окружностью, тогда $x = p – a$, $y = p – b$, $z = p – c$ (p – полупериметр треугольника, см. рис. 3). Так как $x + y + z = 3p – (a + b + c) = p$, $y + z = 2p – b – c = a$, $x + z = 2p – a – c = b$, то с учётом формулы Герона неравенство примет вид: $4S^2 \le (ab)^2$, где S – площадь треугольника. Последнее неравенство выполняется, так как $S = 0{,}5ab\sin C \le 0{,}5ab$.

Второй способ. Так как значения переменных x, y и z положительны, то $4xyz(x + y + z) \le (y + z)^2(x + z)^2 \Leftrightarrow (xy + xz + yz + z^2)^2 \ge 4xyz(x + y + z) \Leftrightarrow xy+z(x+y+z)\ge 2\sqrt{xyz(x+y+z)}$ $\Leftrightarrow \frac{xy+z(x+y+z)}{2}\ge\sqrt{xyz(x+y+z)}$. Последнее соотношение выполняется, так как это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Третий способ. Заметим, что переменная x входит в неравенство не выше, чем во второй степени. Рассмотрим разность правой и левой части неравенства и преобразуем её так, чтобы получить квадратный трёхчлен относительно x:

$(y + z)^2(x + z)^2 – 4xyz(x + y + z) = (y + z)^2x^2 + 2z(y + z)^2x + z^2(y + z)^2 – 4yzx^2 – 4yz(y + z)x =$
$= (y – z)^2x^2 – 2(y – z)z(y + z)x + z^2(y + z)^2 = ((y – z)x – z(y + z))^2 \ge 0$ при любых действительных значениях переменных. Следовательно, $4xyz(x + y + z) \le (y + z)^2(x + z)^2$.

Существуют и другие способы решения, например, использование свойства квадратного трёхчлена относительно одной из переменных или использование однородности доказываемого неравенства.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение (любым способом) – 10 баллов

Приведено верное рассуждение, при котором из доказываемого неравенства следует верное, но не указано, что все преобразования равносильны – 8 баллов

Присутствует верная идея решения, но оно не доведено до конца – 2-3 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№4. Прогрессия. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия состоит из положительных рациональных чисел. Ее первый член – не натуральное число, а сумма – натуральное. Может ли натуральное число быть членом такой прогрессии?

Б. Френкин

Ответ: нет.

Решение. Обозначим первый член прогрессии через b, а её знаменатель – через q. По условию знаменатель прогрессии задаётся несократимой дробью $q = \frac{m}{n}$, где $m < n$, а её сумма $S = \frac{b}{1-q}$ – натуральное число.

Произвольный член прогрессии имеет вид: $bq^k = S(1-q)q^k = S\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^k = \frac{S(n-m)m^k}{n^{k+1}}$. Предположим, что это число – натуральное. Так как НОД(m; n) = 1, то и НОД($(n-m)m^k$; n^{k+1}) = 1. Следовательно, S делится на n^{k+1}, откуда S делится на n. Тогда $b = S(1-q) = \frac{S(n-m)}{n}$ – целое число, что противоречит условию задачи.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов
Присутствует верная идея решения, но оно не доведено до конца – 2-3 балла
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№5. Пятиугольник. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Точки M и H – середины сторон BC и CD соответственно. Луч AM пересекает диагональ BD в точке G, а описанную окружность пятиугольника – в точке F. Докажите, что описанная окружность треугольника CFG касается прямой AH.

Е. Акилбаева

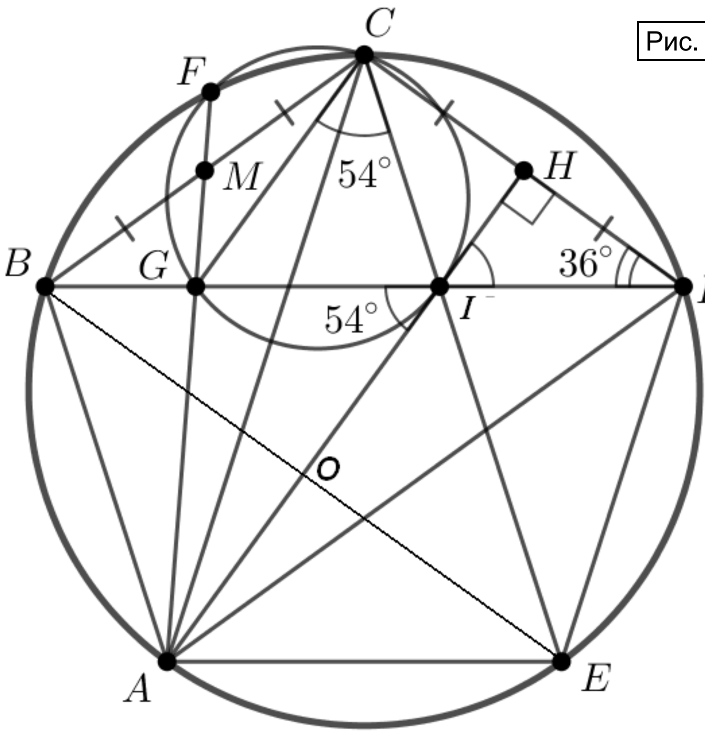


Рис. 5а

Решение. Пусть I – точка пересечения отрезков AH и BD (см. рис. 5а). Докажем, что точка I лежит на CE. Действительно, прямые CE, DB и AH содержат биссектрисы треугольника ACD, которые пересекаются в точке I. Так как $BD \parallel AE$, то $\angle CFG + \angle CIG = \angle CFA + \angle CIA = 160°$, значит, четырехугольник $CFGI$ – вписанный, то есть точка I лежит на описанной окружности треугольника CFG.

Заметим, что $\angle GIA = \angle HID = 90° - \angle IDH = 54°$. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $\angle GCI = 54°$. Для этого докажем, что CG – биссектриса угла ACB, равного 36°.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 36°$ (см. рис. 5б). Пусть CL – биссектриса угла C, луч BG пересекает AC в точке N. Докажем, что AG содержит медиану AM. Внешний угол при вершине B равен 72°.Тогда в треугольнике CBN точка L является пересечением биссектрисы угла C и внешней биссектрисы при вершине B. Следовательно, L – центр вневписанной окружности треугольника CBN. Тогда NL – биссектриса угла BNA, равного 72°.Так как $NL \parallel CB$, то по замечательному свойству трапеции луч AG проходит через середину M отрезка BC. Следовательно, в треугольнике ABC медиана AM, биссектриса угла C и луч BG пересекаются в одной точке.

Тогда CG – биссектриса угла ACB (см. рис. 5а), следовательно, $\angle GCI = 1{,}5\angle ACI = 54^\circ$. Из того, что $\angle GCI = \angle GIA =$ следует, что AH – касательная к описанной окружности треугольника GKC.

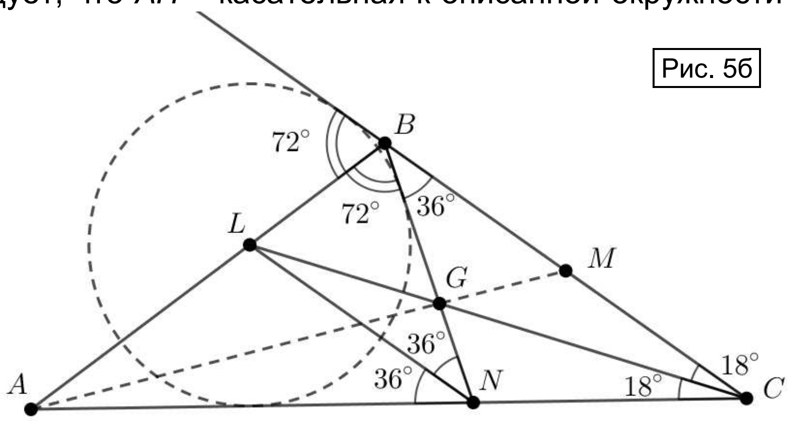


Рис. 5б

Вторую часть доказательства можно провести иначе. Так как $\angle CIH = 90^\circ - \angle ICD = 54^\circ$ (см. рис. 5а), то достаточно показать, что $\angle CGI = 54^\circ$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что CG – основание равнобедренного треугольника CIG.

Докажем, что $CI = GI$. Рассмотрим треугольники AMH и AGI. Они подобны, так как $MH \parallel GI$ (MH – средняя линия треугольника BCD). Следовательно, $\frac{AH}{AI} = \frac{MH}{GI} = \frac{BD}{2GI}$, откуда $\frac{BD}{GI} = \frac{2AH}{AI}$. Пусть O – точка пересечения отрезков AH и BE. Так как $BE \parallel CD$, то $\frac{BI}{ID} = \frac{OI}{IH}$, поэтому $\frac{BD}{ID} = \frac{OH}{IH}$. Докажем, что $\frac{OH}{IH} = \frac{2AH}{AI}$. Так как $AB \parallel IE$, $AE \parallel BI$ и $AI \perp BE$, то четырёхугольник $ABIE$ – ромб. Тогда $AI = 2OI$ и $\frac{2AH}{AI} = \frac{AH}{OI} = \frac{2OI + IH}{OI} = 2 + \frac{IH}{OI}$. Треугольники IOB и IHD подобны, значит, $\frac{IH}{IO} = \frac{HD}{OB} = \frac{CD}{BE}$. Кроме того, $\frac{OH}{IH} = 1 + \frac{OI}{IH} = 1 + \frac{BE}{CD}$. Отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне равно золотому сечению, то есть $\frac{BE}{CD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, а $\frac{CD}{BE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, $\frac{BD}{GI} = \frac{2AH}{AI} = 2 + \frac{IH}{AI} = 2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{OI}{IH} = \frac{OH}{IH} = \frac{BD}{ID}$. Следовательно, $IG = ID = IC$, что и требовалось.*

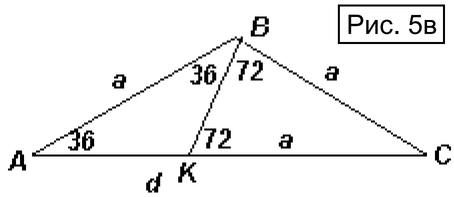


Рис. 5в

** Этот факт можно доказать, например, так. Пусть $AB = BC = a$ – стороны правильного пятиугольника, $AC = d$ – его диагональ (см. рис. 5в). Отметим на AC точку K так, что $\angle ABK = \angle BAC = 36^\circ$, тогда $\angle BKC = \angle KBC = 72^\circ$, значит, $KC = BC = a$. Равнобедренные треугольники ABC и AKB подобны, следовательно, $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AK}$, то есть $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$. Это и соответствует золотому сечению отрезка AC.*

<u>Критерии проверки</u>.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов

Доказано только, что точка I лежит на окружности, описанной около CFG – 2 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок

№6. Эскалатор. *В этом задании могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а затем приведите верное решение.*

«Задача». В воскресенье Вася прошел по неподвижному эскалатору и насчитал 36 ступенек. В понедельник этот же эскалатор двигался вниз, и Вася спустился по движущемуся эскалатору вниз и сосчитал ступеньки. Во вторник он с той же скоростью поднялся вверх по этому эскалатору и вновь сосчитал ступеньки. Известно, что собственная скорость мальчика всегда в 1,4 раза больше скорости движущегося эскалатора. Сколько ступенек он насчитал в понедельник и во вторник?

«Ответ»: 15 и 90 ступенек соответственно.

«Решение». Пусть x – скорость эскалатора, $1{,}4x$ – скорость Васи. В понедельник скорость движения относительно земли – $2{,}4x$, во вторник – $0{,}4x$. Расстояние фиксировано, значит, время движения обратно пропорционально скорости. В то же время, оно прямо пропорционально числу пройденных ступеней. Получаем, что в понедельник Вася прошел 36 : 2,4 = 15 ступеней, а во вторник – 36 : 0,4 = 90 ступеней.

Предложил Д. Калинин

Комментарий. Условие «задачи» корректно, но «ответ» неверен, а «решение» содержит ошибки. Фраза «Расстояние фиксировано, значит, время движения обратно пропорционально скорости» сама по себе верна, если за расстояние принято количество ступенек неподвижного эскалатора. Верно и то, что время прямо пропорционально количеству пройденных ступеней, однако 36 ступеней Вася насчитал двигаясь со скоростью $1{,}4x$, а не со скоростью x. Поэтому использованные пропорции неверны.

Установить, что «ответ» неверен, можно было, не вникая в текст, так как. количество ступенек на неподвижном эскалаторе должно являться средним гармоническим чисел, получаемых в ответе.

Будем измерять расстояние количеством пройденных ступенек, а скорость движения будем измерять, например, количеством ступеней, пройденных за секунду. Так как длина неподвижного эскалатора – 36 ступеней, то в воскресенье Вася двигался $\frac{36}{x}$ секунд. В понедельник Вася шёл $\frac{36}{2{,}4x}$ секунд со скоростью $1{,}4x$ относительно полотна эскалатора, поэтому он насчитал $\frac{36}{2{,}4x}\cdot 1{,}4x$ = 21 ступеньку. Аналогично, во вторник он насчитал $\frac{36}{0{,}4x}\cdot 1{,}4x$ = 126 ступеней.

Можно рассуждать иначе. Пусть количество пройденных ступенек – это время «преодоления» эскалатора, тогда пройденное Васей «расстояние» равно $36\cdot 1{,}4x = 50{,}4x$. В этом случае оно постоянно, поэтому в понедельник Вася насчитал $\frac{50{,}4x}{2{,}4x}$ = 21 ступеньку, а во вторник – $\frac{50{,}4x}{0{,}4x}$ = 126 ступеней.

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).

Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл

Указано, что в «решении» есть ошибки – 1 балл

Объяснена суть ошибки – 3 балла

Приведено верное решение и получен верный ответ – 5 баллов

№7. Параллелепипед. *Для базы ЕГЭ предложена типовая задача (см. ниже).Для её «клонирования» в другие варианты автор предлагает вместо чисел 4, 5 и 7 использовать любые положительные числа.*

«Задача». Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 7. Найдите наибольшую площадь треугольного сечения этого параллелепипеда.

«Ответ»: $4\sqrt{6}$.

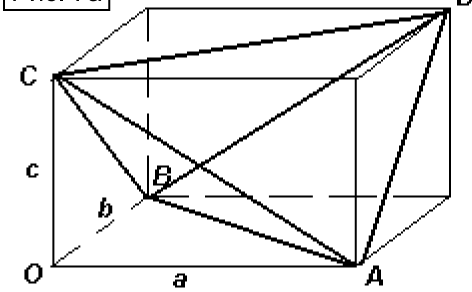
«Решение». Из всех треугольных сечений наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через концы трёх ребер, выходящих из одной вершины. Сторонами этого треугольника и являются диагонали граней, значит, по формуле Герона его площадь равна $\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1}$ = $4\sqrt{6}$.

1) *Прокомментируйте корректность условия «задачи» и её «решения»* .

2) *Согласны ли Вы с мнением автора по «клонированию» ? Обоснуйте*

Предложила И. Раскина на основе задачи В. Рыжика

Рис. 7а



Комментарий. 1) Условие «задачи» содержит ошибку. Параллелепипеда с такими диагоналями граней не существует. Покажем это.

Пусть измерения параллелепипеда *a*, *b* и *c* (см. рис. 7а). Тогда должны одновременно выполняться равенства: $\begin{cases} a^2+b^2=16 \\ b^2+c^2=25 \\ c^2+a^2=49 \end{cases}$. Складывая почленно первые два равенства и вычитая третье, получим, что $2b^2 = -8$. Это равенство невозможно для действительных чисел.

Кроме того, в «решении» есть существенный пробел: утверждение «Из всех треугольных сечений наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через концы трёх ребер, выходящих из одной вершины.» является верным, но оно никак не обосновано.

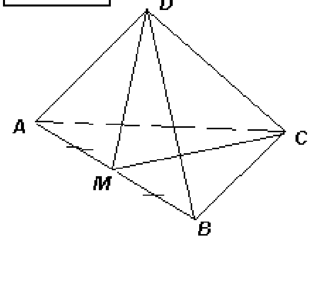
2) Мнение автора по «клонированию» – ошибочно. Введя длины диагоналей в общем виде $d_1 \le d_2 \le d_3$, рассуждением, аналогичным пункту 1), получим, что система имеет решение, если $d_1^2+d_2^2>d_3^2$. Таким образом, указанное в «решении» сечение в любом прямоугольном параллелепипеде должно являться остроугольным треугольником (*в условии «задачи» это не так, поскольку* $4^2+5^2<7^2$).

Этот же факт можно получить и из других соображений. Приведём два из них.

1. Прямоугольный тетраэдр *OABC* (см. рис. 7а) является ортоцентрическим, то есть его вершины проектируются в ортоцентры противолежащих граней. Докажем, что его высота, проведённая из вершины *O*, проектируется внутрь треугольника *ABC*, откуда и будет следовать, что этот треугольник – остроугольный.

Введём декартову систему координат с положительными полуосями *OA, OB и OC.* Уравнение плоскости *ABC* в отрезках имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где a, b *и* c – положительные числа Перпендикуляр к плоскости *ABC* направлен по нормали к ней, вектор нормали $\bar{n}=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$ имеет положительные координаты, значит, прямая, содержащая высоту тетраэдра, пересекает *ABC* в точке с положительными координатами, которая лежит внутри треугольника *ABC*.

Рис. 7б



2. Заметим, что тетраэдр *DABC* является равногранным, так как в прямоугольном параллелепипеде равны скрещивающиеся диагонали противолежащих граней (см. рис. 7а).

Предположим, что треугольник *ABC* – не остроугольный, например, угол *ACB* – не острый, тогда и равный ему угол *BDA* – также не острый. Проведём в треугольниках *ABC* и *DAB* медианы *CM* и *DM* (см. рис. 7б). Так как *DM* = *CM* ≤ $\frac{1}{2}$*AB*, то для треугольника *DMC* не выполняется неравенство треугольника. Противоречие.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

1) Указано, что условие «задачи» некорректно – 1 балл

Доказана некорректность условия «задачи» – 3 балла

Верно указан пробел в «решении» – 2 балла

2) Указано, что сечение, рассмотренное в «решении», должно быть остроугольным треугольником – 1 балл

Доказано, что в любом прямоугольном параллелепипеде такое сечение является остроугольным треугольником – 3 балла

Не указано, что такое сечение – остроугольный треугольник, но сказано, что для сторон сечения должно выполняться неравенство треугольника – 1 балл

№8. Свойство функции. Семиклассник Ваня доказал утверждение: «Если $\frac{c}{d}=\frac{a+b}{a-b}$, то $\frac{a}{b}=\frac{c+d}{c-d}$», используя характеристическое свойство пропорции. Его старший брат десятиклассник Саша, заглянув в Ванину тетрадь, понял, что этот факт следует из некоторого свойства функции $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Объясните, какое свойство функции имел в виду Саша и каким образом из него следует указанный факт.

Предложил А. Блинков

Комментарий. Саша имел ввиду, что функция, обратная к $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, совпадает с $f(x)$. Действительно, если $y=\frac{x+1}{x-1}$, то $xy-y=x+1 \Leftrightarrow x(y-1)=y+1$, следовательно, $x=\frac{y+1}{y-1}$. Этот факт можно увидеть и на графике функции $f(x)$: каждая ветвь гиперболы симметрична относительно прямой *y* = *x*.

Преобразуем указанные пропорции, учитывая, что *b* ≠ 0 и *d* ≠ 0: $\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}$ и $\frac{a}{b}=\frac{\frac{c}{d}+1}{\frac{c}{d}-1}$. Тогда сформулированное утверждение примет вид: «Если $f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{d}$, то $f\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}$, которое и выполняется в силу того, что $f(x) = f^{-1}(x)$.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Верно указано используемое свойство функции – 3 балла

Доказано, что функция, обратная к данной, совпадает с ней – 3 балла

Показано, каким образом из указанного свойства следует приведённый факт – 4 балла

№9. Корни уравнения. «Задача». Найдите количество корней уравнения $\frac{tgx + tg2x}{1 - tgx \cdot tg2x} = 1$ на отрезке [0; 2π].

«Решение ученицы». $tgx + tg2x = 1 - tgx \cdot tg2x$; $tg2x + tgx \cdot tg2x = 1 - tgx$; $tg2x(1 + tgx) = 1 - tgx$; $\frac{2tgx}{1 - tg^2 x}(1 + tgx) = 1 - tgx$; $\frac{2tgx}{1 - tgx} = 1 - tgx$; $2tgx = (1 - tgx)^2$. Пусть $tgx = t$, тогда $t^2 - 4t + 1 = 0$; $t = 2 \pm \sqrt{3}$; отмечаем на единичной окружности.

«Ответ»: 4 корня.

«Решение учительницы». $tg3x = 1$; $3x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$; отмечаем на единичной окружности.

«Ответ»: 6 корней.

Вопрос учительницы: «В какой момент ученица потеряла два корня?». Помогите ей полностью разобраться в решениях.

Предложил А. Шкловер

Комментарий. «Решение ученицы» не могло привести ни к потере, ни к приобретению «посторонних» корней, так как если выражение $\frac{tgx + tg2x}{1 - tgx \cdot tg2x}$ определено, то все переходы корректны: каждое выражение, на которое ученица умножает или делит обе части уравнения, отлично от нуля. Для того, чтобы её рассуждения были полностью верными, ей надо было это обосновать. При этом, проверка, то есть подстановка найденных корней в исходное уравнение, решает только проблему отсева «посторонних» корней, но не выявит потерю корней, если таковая произошла.

А вот учительница приобрела два «лишних» корня. В рассмотренном уравнении можно переходить к формуле тангенса суммы только в случае, если определены tgx и $tg2x$. Иначе может получиться, что исходное выражение не определено, а $tg3x$ определен. Поэтому из шести корней, найденных учительницей, «посторонними» являются $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}$, так как при этих значениях $tg2x$ не имеет смысла. Отметим, что рассуждения учительницы не могли привести к потере корней, поэтому ей достаточно было сделать проверку, либо найти область определения левой части исходного уравнения и учесть её в окончательном ответе.

Комбинация решений учительницы и ученицы – это еще один способ вычисления тангенса 15°. Сравнивая полученные ими ответы, находим, что $tg15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что ученица не теряла корней – 1 балл

Объяснено, почему все преобразования уравнения ученицей являются равносильными – 2 балла

Указано, что в решении ученицы это требовалось пояснить – 1 балл

Указано, что учительница приобрела два «посторонних» корня – 1 балл

Указаны «посторонние» корни в её «решении» – 2 балла

Объяснено, из-за чего появились «лишние» корни – 2 балла

Указано, каким образом учительница могла этого избежать – 1 балл

№10. Сколькими способами? Учитель дал на кружке задачу: «В поход пошли 7 мужчин и 4 женщины. Сколькими способами они могут так построиться для прохождения сложного участка, чтобы направляющим и замыкающим шли мужчины, и две женщины не следовали друг за другом?».

Ученик начал решать так: «Сначала построим женщин. Это можно сделать 4! способами. Потом надо поставить каких-то мужчин на пять мест: первое, последнее и в промежутках между женщинами. На первое из этих мест есть 7 кандидатов, на второе 6 и т. д. Поставить всех женщин и пятерых мужчин можно $4!\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ способами. Теперь поставим двух оставшихся мужчин ...».

В этом месте ученик запнулся и не смог продолжить решение.

Какие действия учителя Вы считаете оптимальными:

- ✓ *указать на уже сделанные ошибки (если они есть);*
- ✓ *помочь довести решение до конца (в этом случае дополните решение; а перечислять наводящие вопросы не требуется);*
- ✓ *пояснить, что решение плохое (почему?) и постараться подвести к верному решению (к какому)?*

Из трёх возможностей необязательно выбирать ровно одну.

И. Раскина

Комментарий. Ошибок в приведённом фрагменте решения нет. Но запнулся ученик не случайно. В уже построенную конструкцию МЖМЖМЖМЖМ можно добавлять оставшихся мужчин на любое место: для первого 10 возможностей, для второго 11, всего 110. Но при этом все способы будут подсчитаны неоднократно. Сколько именно раз, понять непросто, так как сначала мы выбирали для каждого места мужчин, а потом стали выбирать для двух мужчин места. Те места, где двое мужчин подряд, подсчитаны четырьмя способами ($2\cdot 2 = 4$), а те, в которых есть трое мужчин подряд, подсчитаны тремя способами. Тот факт, что не все способы подсчитаны одинаковое количество раз, не позволяет довести решение до ответа делением.

Пытаться преодолеть эту трудность «в лоб», перебирая разные варианты расположения мужчин, нецелесообразно. Ведь цель – не «доковылять» до ответа любой ценой, а научить искать хорошие решения, отбраковывая ложные пути. В комбинаторике это означает организовывать выбор так, чтобы каждый вариант считался одинаковое число раз. Приведём два способа подсчитать каждый вариант ровно один раз и получить верный ответ без утомительного разбора случаев.

Ответ. $7!\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$.

Первый способ. Расставим сначала мужчин. Они могут стать друг за другом 7! способами. При каждом способе есть 6 мест между двумя мужчинами, на которые можно ставить женщин. Занумеруем женщин как угодно, результат не зависит от того, какую из них мы раньше поставим на место. Место для первой женщины можно выбрать любым из шести способов, для второй – любым из пяти оставшихся, для третьей – из четырёх, для четвёртой – из трёх. Всего $7!\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ способов построения.

Второй способ (основанный на решении ученика). Расставим сначала женщин и пятерых мужчин $4!\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ способами. Но роли этих мужчин уточним: первый - направляющий, второй следует непосредственно за первой женщиной (их потом нельзя разделять другими мужчинами), третий - за второй и т.д. Образуются пять групп: направляющий мужчина и четыре неразлучные пары. Шестого мужчину можно поставить после любой из этих пяти групп (5 возможностей), седьмого - после любой из этих групп или после шестого мужчины (6 возможностей). Всего $4!\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 6 = 7!\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ расстановок.

<u>Критерии проверки</u>.

Верно объяснено, в чём проблема решения ученика и приведено верное решение – 10 баллов

Приведено верное решение, разумно продолжающее рассуждение ученика, но не указана проблема в его решении (подсчёт разных вариантов разное количество раз) – 8 баллов

Приведено верное решение. В качестве проблемы указан неоднократный подсчёт вариантов, но не сказано, что они считаются разное количество раз, поэтому она не решается делением – 8 баллов

Приведено верное решение, не являющееся продолжением рассуждения ученика, но не указана проблема его решения (подсчёт разных вариантов разное количество раз) – 6 баллов
Проблема решения ученика указана, но верное решение не приведено – 4 балла