XVIII Творческий конкурс учителей по математике
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

№1. При выходе с участков голосования за присвоение Пятому артиллерийскому заводу имени А.С. Пушкина был произведён опрос. 50% проголосовавших сказали, что голосовали «за», 20% сказали, что голосовали «против», а остальные не стали отвечать как они голосовали. На сайте завода опубликованы данные, что согласно предварительному опросу «за» проголосовало примерно 71,4% участников. Как Вы думаете, каким образом получен этот результат?

Д. Шноль

Решение. Доля голосовавших «за», среди ответивших, как они голосовали, как раз равна $\frac{5}{7} \approx 71,4\%$. Такая оценка для доли голосовавших «за» разумна, если ожидается, что среди не ответивших на опрос голоса распределяются примерно так же, как среди ответивших.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. Число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево. Сколько 13-значных палиндромов делится на 3?

А. Шаповалов

Ответ: 3000000.

Решение. Первый способ. Разобьем такой палиндром на центральную цифру Ц и две группы по 6 цифр. Левая группа образует шестизначное число Л, правая получается записью цифр левого в обратном порядке.

Число N делится на 3 если его сумма цифр $s(N)$ делится на 3. Так как у правой и левой группы суммы цифр одинаковы, то сумма цифр палиндрома равна $2s$(Л) + Ц. Она делится на 3 тогда и только тогда, когда s(Л) и Ц дают одинаковые остатки при делении на 3.

Всего есть 900000 шестизначных чисел. Разобьём их на тройки так, чтобы в каждой встречались по разу остатки 0, 1, 2 от деления суммы цифр на 3. Самый простой пример разбиения – на тройки последовательных чисел: (100000, 100001, 100002), ..., (999997, 999998, 999999). В каждой такой тройке числа дают разные остатки от деления на 3, поэтому и суммы их цифр дают разные остатки. Каждый остаток (0, 1, 2) имеют по 900000 : 3 = 300000 чисел.

Таким образом, для каждой цифры Ц есть 300000 вариантов Л, дающих кратный трём палиндром. Значит, всего искомых палиндромов 3000000.

Второй способ. Для краткости будем записывать 13-значный палиндром так: Xa_7X^*, где X – это первые шесть цифр, X^* – те же цифры в обратном порядке, a_7 – седьмая цифра. Установим взаимно однозначное соответствие между 13-значными и 14-значными палиндромами, согласно следующим правилам:

если a_7 кратно 3, то друг другу соответствуют числа Xa_7X^* и $Xa_7a_7X^*$;

если a_7 делится на 3 с остатком 1, то друг другу соответствуют числа Xa_7X^* и $X(a_7+1)(a_7+1)X^*$,

если a_7 делится на 3 с остатком 2, то друг другу соответствуют числа Xa_7X^* и $X(a_7–1)(a_7–1)X^*$.

Так как в каждой паре соответствующих друг другу палиндромов остатки от деления на 3 совпадают, то 13-значных палиндромов, кратных трём, столько же, сколько 14-значных, кратных трём. Но 14-значный палиндром делится на 3 тогда и только тогда, когда на 3 делится семизначное число, состоящее из семи его первых цифр, так как сумма цифр 14-значного палиндрома равна удвоенной сумме цифр семизначного числа.

Из 9000000 семизначных чисел ровно треть делится на 3. Следовательно, 13-значных палиндромов, делящихся на 3, столько же.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено в целом верное рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Присутствуют верные идеи решения, но до конца оно не доведено – 2-3 балла
Приведён только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Даны четыре концентрические окружности с радиусами 1, 2, 3 и 4. Существует ли квадрат, вершины которого лежат по одной на каждой окружности?

Из зарубежных олимпиад

Ответ: не существует.

Решение. Первый способ. Лемма. Даны прямоугольник $ABCD$ и произвольная точка M. Тогда $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Доказательство. Если точка M совпадает с одной из вершин прямоугольника, то требуемое равенство следует из теоремы Пифагора, а если она совпадает с центром O прямоугольника, то равенство очевидно выполняется.

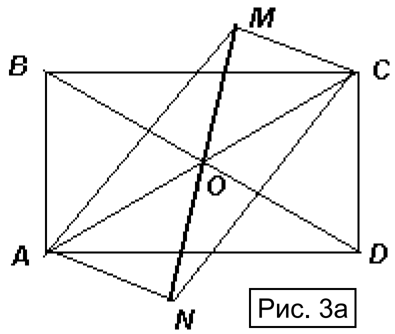

Рис. 3а

В противном случае проведём отрезок MO и продлим его до точки N так, что O – середина отрезка MN (см. рис. 3а). Тогда $AMCN$ – параллелограмм. Следовательно, $MN^2 + AC^2 = 2MA^2 + 2MC^2$. Аналогично из параллелограмма $BMDN$ получим, что $MN^2 + BD^2 = 2MB^2 + 2MD^2$. Так как $AC = BD$, то равны левые части полученных равенств, следовательно, равны и правые части, то есть $2MA^2 + 2MC^2 = 2MB^2 + 2MD^2$. Разделив обе части этого равенства на 2, получим требуемое.

Вместо теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма можно использовать, например, её следствие: формулу, выражающую длину медианы треугольника через длины его сторон.

Отметим, что доказанное равенство справедливо и для случая, когда точка M не лежит в плоскости прямоугольника.

Теперь вернёмся к задаче. Пусть требуемый квадрат существует, тогда расстояния от центра данных окружностей до его вершин равны радиусам этих окружностей. Но числа 1, 2, 3 и 4 нельзя разбить на пары так, чтобы суммы квадратов чисел в этих парах были равны. Противоречие.

Второй способ. Пусть такой квадрат $ABCD$ существует. Не умаляя общности, можно считать, что точка A лежит на окружности радиуса 4, а точка D – на окружности радиуса 2 или 1. Из точки A проведём касательные к окружностям радиусов 3 и 2 (B_1 и D_1 – соответствующие точки касания, O – центр окружностей, см. рис. 3б). Тогда, независимо от расположения вершины B, лучи AB_1 и AD_1 пройдут вне угла BAD (либо совпадут с его сторонами), значит, $\angle B_1AD_1 \geq \angle BAD = 90°$.

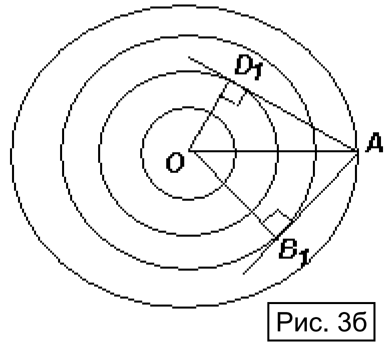

Рис. 3б

С другой стороны, $\angle B_1AD_1 = \angle B_1AO + \angle D_1AO = \arcsin\frac{3}{4} + \arcsin\frac{1}{2} < 60° + 30° = 90°$, так как $\arcsin\frac{3}{4} < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 60°$. Противоречие.

Третий способ. Пусть такой квадрат $ABCD$ существует, вершина A лежит на окружности радиуса 4. Обозначим окружности, на которых лежат соседние с A вершины B и D, через β и δ соответственно. Рассмотрим поворот с центром A на 90°, при котором образом вершины B является вершина D. Тогда образом центра O данных окружностей является центр O' их образов, причём $OO' = 4\sqrt{2}$. Так как D – образ точки B, то D принадлежит образу β' окружности β. Таким образом, окружность δ с центром O и окружность β' с центром O' имеют общую точку D, значит, сумма их радиусов не меньше, чем $4\sqrt{2}$. Но никакие две различные окружности радиусов 1, 2 и 3 этому условию не удовлетворяют, так как $2 + 3 < 4\sqrt{2}$. Противоречие.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Присутствуют верные идеи решения, но до конца оно не доведено – 2-3 балла
Приведён только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№4. Найдите все такие натуральные a, b и c, что все корни уравнений $x^2 – 2ax + b = 0$, $x^2 – 2bx + c = 0$, $x^2 – 2cx + a = 0$ являются натуральными числами.

Фольклор

Ответ: $a = b = c = 1$.

Решение. Если корни этих уравнений – натуральные числа, то их дискриминанты являются точными квадратами. Тогда выполняются равенства $a^2 – b = m^2$, $b^2 – c = n^2$, $c^2 – a = k^2$, где k, m, n – целые неотрицательные числа. Условие задачи не меняется при циклическом сдвиге параметров, поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $c \le a$ и $c \le b$. Но $c = b^2 – n^2 = (b – n)(b + n) > b$ при $n \ne 0$. Значит, $n = 0$ и $b^2 = c \le b$. Следовательно, $b = c = 1$. Последнее равенство $a = 1$ следует, например, из условия $a^2 = 1 + m^2$ (никакие другие точные квадраты, кроме 0 и 1, не могут отличаться друг от друга на единицу).

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено в целом верное рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, и получен верный ответ – 8 баллов
Присутствуют верные идеи, но решение до конца не доведено – 2-3 балла
Приведён только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№5. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 2)^2x^4 + 2(a^2 + 2a)x^3 + 8x – a^2 – a + 3 = 0$ имеет единственный корень?

Предложил А. Иванищук

Ответ: $a = –-2$.

Решение. При $a = –2$ уравнение становится линейным: $8x + 1 = 0$. Оно имеет единственное решение.

При $a \ne –2$ рассмотрим многочлен $P(x) = (a + 2)^2x^4 + 2(a^2 + 2a)x^3 + 8x – a^2 – a + 3$. Это многочлен четвертой степени с положительным старшим коэффициентом. Множеством его значений является луч $\left[P_{\min};+\infty\right)$, причём $P(x) \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$.

Заметим, что $P(–1) = – 2a^2 – a – 1 < 0$ при всех значениях параметра a. Следовательно, многочлен $P(x)$ будет иметь корни на интервалах $(-1;+\infty)$ и $(-\infty;-1)$. То есть, в этом случае, исходное уравнение будет иметь, как минимум, два корня.

Покажем из каких соображений можно подобрать $x = –1$. Запишем левую часть исходного уравнения в виде трёхчлена с переменной a: $f(a) = (x^4 + 2x^3 – 1)a^2 + (4x^4 + 4x^3 – 1)a + 4x^4 + 8x + 3$. Для того, чтобы $f(a)$ принимало отрицательные значения при всех значениях a, этот трёхчлен должен быть квадратным (линейная функция не может *быть отрицательной при всех значениях a). Значит, требуется выполнение двух условий: 1) $x^4 + 2x^3 - 1 < 0$; 2) $D < 0$.*

Исследовать дискриминант затруднительно, так как он является многочленом шестой степени без рациональных корней. Условие 1) может выполняться только при трёх целых значениях x: – 2; – 1; 0. Из них для наших целей подходит x = – 1, но существуют и нецелые значения x, подстановка которых приведёт к нужному результату.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено в целом верное рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, и получен верный ответ – 8 баллов
Присутствуют верные идеи, но решение до конца не доведено – 2-3 балла
Приведён только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок

В заданиях №№6 – 9 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№6. «Задача». Каждому ребёнку, пришедшему на ёлку, Дед Мороз подарил по 10 конфет, 3 мандарина и 2 шоколадки, а Снегурочка – по 12 конфет, 4 мандарина и 4 шоколадки. Они раздали 400 конфет и шоколадок вместе взятых. А сколько мандаринов?

«Ответ»: 100 мандаринов.

«Решение». Из условия следует, что Дед Мороз и Снегурочка выдали детям в 4 раза больше конфет и шоколадок, чем мандаринов. Поэтому мандаринов подарено 400 : 4 = 100.

Предложил А. Грибалко по задаче из XIX турнира имени А.П. Савина

Комментарий. Условие «задачи» некорректно; числовые данные противоречат друг другу. Действительно, пусть на ёлку пришли x детей. Тогда Дед Мороз и Снегурочка раздали $10x + 2x + 12x + 4x = 28x$ конфет и шоколадок вместе взятых. По условию это равно 400. Но уравнение $28x = 400$ не имеет решений в целых числах, так как $28x$ кратно 7, а 400 не кратно 7.

Критерии проверки.

Верно объяснена некорректность условия – 10 баллов
Некорректность условия указана, но не объяснена – 2 балла
Некорректность условия указана, но объяснена неверно – 0 баллов
Указано или подразумевается, что условие корректно 0 баллов

№7. «Задача». Атос играл в кости с англичанином. Они по очереди (начинал англичанин) бросали игральную кость, на которой выпадает от 1 до 6 очков. Атосу, утомлённому долгим сидением в погребе, не везло: среди каждых трёх его последовательных бросков выпадала хотя бы одна двойка, а среди каждых пяти последовательных бросков – хотя бы одна единица. Наоборот, за каждые шесть последовательных бросков англичанин выбрасывал не менее четырёх шестёрок. Выигрывал тот, кто первым набрал не менее, чем 58 очков. Мог ли Атос выиграть?

«Ответ»: нет.

«Решение». Найдем наибольшее количество очков, которое мог набрать Атос после пятнадцати бросков. Среди них пять двоек и три единицы, поэтому, даже если в каждом из остальных семи бросков выпадали шестёрки, то он набрал не больше, чем $5·2 + 3·1 + 7·6 = 55$ очков. Англичанин за первые 12 бросков набрал не меньше, чем $8·6 + 4·1 = 52$ очка, а за три следующих броска выпала еще хотя бы одна шестерка. То есть он набрал хотя бы 58 очков и выиграл.

Предложил А. Антропов по задаче из Уральского турнира юных математиков 2014 г.

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «Ответ» и «Решение» неверные. При этом, в «Решении» верно объяснено, что если Атос сделал 15 бросков, то он не мог набрать больше, чем 55 очков. Но он мог выиграть, набрав 58 очков уже за 14 бросков! Действительно: 6 + 6 + 2 + 6 + 1 + 2 + 6 + 6 + 2 + 1 + 6 + 2 + 6 + 6 = 58. Англичанин, в этом случае, мог выбросить, например, 1 + 1 + 6 + 6 + 6 + 6 + 1 + 1 + 6 + 6 + 6 + 6 + 1 + 1, что соответствует условию, набрать тем самым 54 очка и проиграть.

Это может показаться удивительным: как же так, ведь если Атос сделает еще один бросок, то он, по ранее доказанному, должен набрать не более 55 очков? Но дело в том, что последовательность результатов 6, 6, 2, 6, 1, 2, 6, 6, 2, 1, 6, 2, 6, 6 вообще нельзя продолжить с выполнением условий задачи! Действительно, следующее число с одной стороны должно быть 1, а с другой стороны – 2.

Критерии проверки.

Верно приведён контрпример, показывающий, что «Ответ» и «Решение» ошибочны и объяснена ошибка в «Решении» – 10 баллов

Приведен верный контрпример, но ошибка в «Решении» не объяснена – 8 баллов

Верно указано, что «Ответ» и «Решение» неверные, но обоснование неполное, а контрпример не приведён – 2-3 балла

Указано только, что «Ответ» и «Решение» неверные – 1 балл

№8. «Задача». На диагонали *AC* квадрата *ABCD* отмечена точка *K*. В точке *K* восставлен перпендикуляр к *AC*, пересекающий *BC* в точке *M*. Докажите, что $\angle AMK = \angle ADK$ тогда и только тогда, когда *CK* = *BM*.

«Решение». Так как $\angle CMK = \angle MCK = 45°$, то *CK* = *MK* (см. рис. 8 а. б).

1) Если *CK* = *BM*, то *BM* = *MK* (см. рис. 8а). Тогда прямоугольные треугольники *ABM* и *AKM* равны (по гипотенузе и катету), значит, *AK* = *AB* = *AD* и $\angle AMK = 0{,}5\angle BMK = 67{,}5°$. Из равнобедренного треугольника *DAK* получим, что $\angle ADK = (180° - \angle DAK) : 2 = 67{,}5° = \angle AMK$.

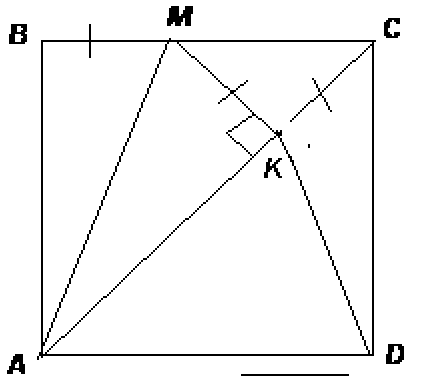

Рис. 8а

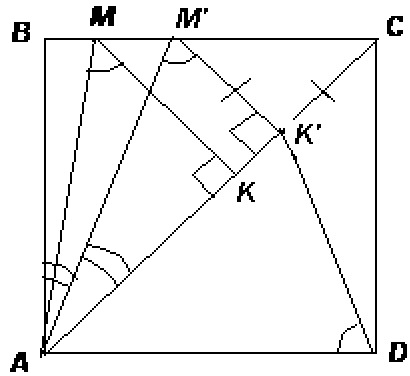

Рис. 8б

2) Пусть $\angle AMK = \angle ADK$, но $CK \neq BM$. Проведем биссектрису угла *CAB*, которая пересечёт сторону *BC* в точке *M*' (см. рис. 8б).. Из точки *M*' опустим перпендикуляр *M'K*' на диагональ *AC*. Прямоугольные треугольники *ABM*' и *AK'M*' равны (по гипотенузе и острому углу), значит, *AK*' = *AB* = *AD*. Тогда по доказанному в пункте а) $\angle AM'K' = \angle ADK$, то есть $\angle AM'K' = \angle AMK$. Но это невозможно, если $\angle M'AK' \neq \angle MAK$. Следовательно, точки *M*' и *K*' совпадают с точками *M* и *K* соответственно, то есть *CK* = *BM*.

Предложил А. Блинков

Комментарий. Утверждение «Задачи» неверно, а в «Решении» есть ошибка. Если корректно применить в части 2) к перпендикуляру *K'M*' утверждение, доказанное в части 1), то вместо равенства $\angle AM'K' = \angle ADK$ должно быть равенство $\angle AM'K' = \angle ADK'$.

На самом деле, указанные в условии углы *AMK* и *ADK* равны для любой внутренней точки *K* диагонали *AC*. Действительно, четырёхугольник *ABMK* вписанный (его углы *B* и *K* – прямые), значит, $\angle AMK = \angle ABK$, а равенство углов *ABK* и *ADK* следует из симметрии относительно *AC*.

Некоторые участники рассматривали случай, когда точка M лежит на прямой BC, но не является внутренней точкой стороны квадрата, и доказывали, что в этом *случае утверждение задачи неверно. На очном туре в аудиториях объявляли, что точка M лежит на стороне. Мы понимаем, что участники интернет-тура не могли задать вопрос, и, наверно, это стоило указать в условии. Тем не менее, жюри приняло решение никак не оценивать разор этого случая, так как утверждение задачи неверно и в случае, рассмотренном в «Решении».*

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что утверждение «Задачи» неверное – 1 балл

Объяснено, почему углы AMK и ADK равны всегда – 6 баллов (если это не доказано в общем виде, а только приведён контрпример, в котором эти углы равны, а CK $\neq$ BM – 3 балла)

Верно объяснена ошибка в «Решении» – 3 балла

№9. «Задача». Среди всех цилиндров, вписанных в шар радиуса *R*, найдите цилиндр с наибольшей площадью полной поверхности.

«Ответ»: цилиндр с радиусом основания $R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ и высотой $2R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

«Решение». Пусть *r* – радиус основания цилиндра, тогда его высота $H = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Площадь полной поверхности цилиндра: $S = 2\pi r(r + H) = 2\pi(r^2 + 2r\sqrt{R^2 - r^2})$.

Рассматривая полученное выражение как функцию *S*(*r*), определённую на промежутке (0; *R*). найдём её производную: $S'(r) = 2\pi(2r + 2\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}})$.

Решая уравнение *S*'(*r*) = 0, после преобразований получим: $5r^4 - 5R^2r^2 + R^4 = 0$. Его положительные корни $r = R\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}}$ являются стационарными точками функции *S*(*r*). При достаточно малых *r* цилиндр превращается в «столбик» с маленькой площадью полной поверхности, а при *r*, близких к *R*, – в «блинчик», у которого площадь поверхности стремится к $2\pi R^2$. Следовательно, функция сначала возрастает, затем убывает, а потом снова возрастает. Значит, радиус искомого цилиндра является точкой максимума рассматриваемой функции, то есть $r = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. Тогда $H = 2R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

Предложил А. Акимов

Комментарий. Условие «Задачи» корректно, а «Ответ» и «Решение» неверные.. В «Решении» верно найдены формула для функции площади поверхности цилиндра и производная этой функции, но неверно решено уравнение *S*'(*r*) = 0. Действительно, по ходу его преобразований получается уравнение $r\sqrt{R^2 - r^2} = 2r^2 - R^2$. При возведении его в квадрат не учтено условие $2r^2 - R^2 \geq 0$. Из этого неравенства следует, что $R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ не является корнем уравнения *S*'(*r*) = 0, так как $R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} < \frac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} < 5$.

Кроме того, в «Решении» нет обоснования изменения вида монотонности функции площади при переходе через стационарные точки.

Еще одна ошибка в «Решении» состоит в том, что «обоснованная» точка локального максимума объявляется точкой, где функция достигает наибольшего значения, хотя в самом «Решении» говорится о возрастании функции после перехода второй стационарной точки. Ведь возможна ситуация, что предельное значение площади при *r* стремящемся к *R* оказалось бы больше, чем значение площади при $r = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. В этом случае «задача» не имела бы решения.

Верное решение и ответ получатся, если учесть условие $2r^2 - R^2 \geq 0$, указанное выше. Тогда. Тогда на промежутке (0; R) функция $S(r)$ имеет единственную стационарную точку $r = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, при переходе через которую производная меняет знак с «+» на «–», что обеспечивает в ней локальный максимум. Следовательно, в силу единственности точки экстремума на рассматриваемом промежутке, в этой точке и достигается наибольшее значение площади поверхности. Тогда $H = 2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

В текстах условий, предложенных участникам, была допущена опечатка: отсутствовал знак радикала в знаменателе последнего слагаемого производной.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что «Ответ» и «Решение» неверные – 1 балл
Указана опечатка при вычислении производной (потерян знак радикала) – 1 балл
Верно указана и объяснена ошибка при решении уравнения $S'(r) = 0$ – 3 балла
Верно указаны и объяснены обе ошибки обоснования в заключительной фазе «Решения» – по 1 баллу за каждую
Приведено верное решение – 2 балла
В ответе верно указаны значения обоих параметров (R и H) – 1 балл

№10. «Задача». Из Барселоны в Парагвай выехал автобус. Через 5 минут из Барселоны по той же дороге выехала маршрутка. Через 10 минут после этого она обогнала автобус и прибыла в Парагвай на 15 минут раньше автобуса. Сколько времени автобус ехал от Барселоны до Парагвая?

«Ответ»: 1 час.

«Решение». Пусть автобус ехал из Барселоны в Парагвай x минут со скоростью 2 км/мин. Тогда за 15 минут он проехал 30 км. Маршрутка эти же 30 км проехала за 10 минут, поэтому её скорость 3 км/мин. Маршрутка доехала от Барселоны до Парагвая за x – 20 минут. Расстояние между Барселоной и Парагваем равно $2x = 3(x - 20)$ км. Из уравнения находим, что $x = 60$.

1) Прокомментируйте «Решение». Верный ответ получен случайно или это предсказуемо? Почему?
2) Приведите своё решение данной задачи.
3) Приведите пример задачи совсем другого типа (не на движение и не на работу) с таким же недостатком в «Решении», но верным ответом. Поясните, как исправить такое «Решение».

Предложила И. Раскина

Комментарий. 1) «Решение» приведено для частного случая: скорость автобуса в условии не дана и не может быть из него получена; принимать её равной 2 км/мин нельзя. Однако верный ответ получен не случайно. Дело в том, что он зависит не от абсолютных значений скоростей автобуса и маршрутки, а лишь от отношения их скоростей, которое как раз однозначно определяется условием. Поэтому любое предположение о скорости автобуса при отсутствии других погрешностей в решении приводит к верному ответу.

Подобная ситуация возникает в задачах на движение, в которых все данные величины одноимённы и требуется найти такую же величину (в нашем случае дано и требуется найти время). Одну любую величину другого типа (в нашем случае скорость или расстояние) можно считать произвольным числом. Для обоснования решения надо указать соответствующую единицу измерения. В частности, приведённое «Решение» можно исправить, заменив всюду километры на условные единицы длины, равные расстоянию, которое автобус проезжает за полминуты.

2) Приведём альтернативное решение, явно использующее отношение скоростей. Рассмотрим часть пути от Барселоны до места встречи. Автобус его проехал за 15 минут,

а маршрутка – за 10 минут. Это означает, что она ехала в 15 : 10 = 1,5 раза быстрее автобуса. Теперь посмотрим на весь путь. Маршрутка и его проехала в 1,5 раза быстрее. При этом она потратила на 5 + 15 = 20 минут меньше. Из уравнения $1{,}5t - t = 20$ получим, что она ехала $t = 40$ (минут), а автобус – 60 минут.
3) Решение для частного случая (необоснованное) приводит к верному ответу также в задачах на доли или проценты, в которых даны и требуется найти не абсолютные, а относительные значения одних величин, выраженные в долях или процентах от других. Рассмотрим два примера.

Задача 1. Колода на 25% легче камня и на 40% легче бревна. Что и на сколько процентов тяжелее: камень или бревно?

«Решение». Пусть бревно весит 100 кг. Тогда колода весит 60 кг. Её масса составляет 3/4 массы камня, поэтому камень весит 80 кг. Это на 20% меньше массы бревна.

Полученный ответ 20% верен. Решение станет верным, если вместо 100кг, 60кг и 80 кг писать $100x$ кг, $60x$ кг и $80x$ кг, либо x кг, $0{,}6x$ кг и $0{,}8x$ кг соответственно.

Задача 2. Корней Иванович прислал Крокодилу новых и сладких калош. В первый же день сам Крокодил съел на ужин 1/4 угощения, его жена – 1/5 остатка, а Тотоша – 2/3 того, что не съели мама с папой. Какую часть калош крокодилье семейство оставило на завтра?

«Решение». Пусть вначале было 100 г калош. Крокодил съел 25 г калош, а оставил 75 г. Его жена съела 15 г калош, а оставила 60 г. Тотоша съел 40 г, а оставил 20 г. Это составляет 1/5 присланных калош.

Верный ответ 1/5 получен только для частного случая. Простейший способ получить его для общего случая – перемножить дроби 3/4, 4/5 и 1/3. Исходное количество калош можно принять за единицу или ввести переменную. Вместо единицы можно использовать 100 или любое другое число условных единиц, но не 100 г.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

1) Верно указано, что в «Решении» рассмотрен частный случай – 1 балл
Подробно объяснено, почему верный ответ получен не случайно – 3 балла
2) Приведено верное решение или объяснено как исправить «Решение», чтобы оно стало верным – 2 балла
3) Приведён верный пример и даны необходимые пояснения – 4 балла