XIX Творческий конкурс учителей по математике
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

№1. В конечной геометрической прогрессии $a_1, a_2,..., a_n$ известны сумма всех членов $A = a_1 + a_2 + ... + a_n$ и сумма чисел, им обратных, $B = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$. Чему равняется произведение всех членов прогрессии $P = a_1 a_2 ... a_n$?

Фольклор, предложил А. Иванищук

Ответ: $\left(\frac{A}{B}\right)^{n/2}$.

Решение. Пусть q – знаменатель данной прогрессии. Воспользуемся тем, что в геометрической прогрессии равны произведения членов, равноотстоящих от концов. Действительно, $\forall k$ $a_k a_{n-(k-1)}$ = $a_1 q^{k-1} \cdot a_1 q^{n-k}$ = $a_1 a_n$, так как $a_n = a_1 q^{n-1}$. Значит, P = $(a_1 a_n)^{n/2}$.

С другой стороны, A = $a_1 + a_2 + ... + a_n$ = $\frac{a_1 a_n}{a_n} + \frac{a_2 a_{n-1}}{a_{n-1}} + ... + \frac{a_n a_1}{a_1}$ = $a_1 a_n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + ... + \frac{1}{a_1}\right)$ = $a_1 a_n B$, следовательно, $a_1 a_n = \frac{A}{B}$. Таким образом, P = $\left(\frac{A}{B}\right)^{n/2}$.

Равенство P = $(a_1 a_n)^{n/2}$ можно получить иначе: P = $a_1 q^{0+1+...+(n-1)}$ = $a_1 q^{(n-1)n/2}$ = $\left(a_1^2 q^{n-1}\right)^{n/2}$ = $(a_1 a_n)^{n/2}$.

Составители планировали дать участникам эту задачу только для прогрессии с положительными членами, но в условии это указано не было. Случай прогрессий с отрицательными или знакопеременными членами не добавляет ничего принципиально нового (но ответ в этом случае уже не выражается через A, B и n однозначно).

При проверке мы считали достаточным рассмотрение только прогрессий с положительными членами. Приносим извинения участникам, потратившим время и силы на полное решение задачи в том виде, как она была сформулирована.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, использована формула суммы первых n членов прогрессии, но при этом не рассмотрен случай q = 1) – 8 баллов

Приведён только верный ответ – 2 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. Перед экзаменом Вовочка вырвал для шпаргалок 20% листов из учебника, не обязательно идущих подряд. Нумерация страниц в учебнике начиналась с 1. Докажите, что сумма номеров оставшихся страниц кратна 4.

Фольклор, предложил А. Иванищук

Решение. Заметим, что на любом листе номера страниц имеют вид 4*n* + 1 и 4*n* + 2 или 4*k* + 3 и 4*k* + 4, где *n* и *k* – целые неотрицательные числа. Значит, на любом листе остаток от деления на 4 суммы номеров страниц равен 3. Из условия задачи следует, что количество листов в учебнике кратно 5, так как Вовочке удалось вырвать пятую часть всех листов. Поэтому количество оставшихся листов кратно 4. Сумма такого количества чисел, имеющих одинаковый остаток при делении на 4, будет кратна 4.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8-9 баллов
Замечено только, что количество оставшихся листов делится на 4 – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Найдите градусную меру острого угла *x*, если $tgx = \dfrac{\sin 36^\circ}{2\sin 42^\circ - \cos 36^\circ}$.

Из архива олимпиады САММАТ

Ответ: $x = 48°$.

Решение. Условие задачи однозначно определяет угол, так как в правой части равенства стоит положительное число ($2\sin 42° > 2\sin 30° = 1 > \cos 36°$), а функция tg*x* строго монотонна на промежутке (0; 90°). Поэтому достаточно подобрать такое значение *x*, чтобы равенство выполнялось.

Для этого проделаем следующие преобразования: $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin 36^\circ}{2\sin 42^\circ - \cos 36^\circ} \Leftrightarrow$ $2\sin x \sin 42^\circ = \sin 36^\circ \cos x + \cos 36^\circ \sin x \Leftrightarrow 2\sin x \cos 48^\circ = \sin\left(36^\circ + x\right)$.

Заметим, что при $x = 48°$ левая часть полученного равенства равна sin96°, а правая часть равна sin84°. Но эти значения равны, так как 96° + 84° = 180°.

Отметим, что если угадать ответ, то аналогичные преобразования можно провести с конкретным значением x = 48°.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведён верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию, но либо его единственность не объяснена, либо не замечена, то есть приведён ответ вида 48° + 180°n – 8 баллов
Приведён верный ответ и объяснена его единственность, но отсутствуют выкладки, показывающие, что этот ответ удовлетворяет условию – 3 балла
Приведён только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№4. Ученик считается прилежным, если у него меньше пяти друзей. Ученик считается образцовым, если все его друзья прилежные. Может ли образцовых учеников быть больше, чем прилежных?

Из архива 2 этапа ВсОШ в Москве

Ответ: нет.

Решение. Рассмотрим всех учеников, которые одновременно являются прилежными и образцовыми. Удалим их (будем считать, что их больше нет), тогда исходные количества образцовых и прилежных учеников уменьшатся на одну и ту же величину. При этом новых образцовых учеников появиться не могло, так как все удаленные были прилежными, а новых прилежных учеников появиться не могло, так как все, с кем дружили удаленные, уже были прилежными. Следовательно, после указанной операции не изменится знак неравенства между количествами прилежных и образцовых учеников.

Теперь новые группы образцовых и прилежных учеников не пересекаются. Пусть *x* – количество образцовых учеников, а *y* – количество прилежных. Предположим, что $x > y$. Так как новый образцовый ученик не является прилежным, то у него не менее пяти друзей, причём он дружит только с прилежными учениками. Подсчитаем количество дружеских пар вида «образцовый ученик – прилежный ученик». С одной стороны, их не меньше чем $5x$, а с другой стороны, их не больше чем $4y$ (так как у каждого прилежного ученика не более четырёх друзей). Следовательно, $4y \geq 5x$, но по нашему предположению $5x > 5y$, поэтому $4y > 5y$ – противоречие.

Таким образом, образцовых учеников не больше, чем прилежных.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

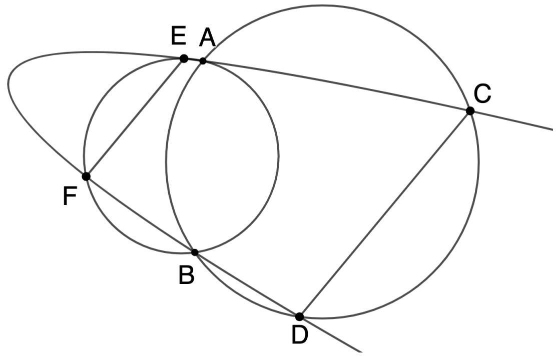
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Присутствует идея удаления учеников, принадлежащих обоим множествам, но дальнейших продвижений нет или они содержат ошибки – 2 балла

Приведён только ответ – 0 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Парабола пересекает первую окружность в точках A, B, C и D, а вторую – в точках A, B, E и F (см. рисунок). Докажите, что $CD \parallel EF$.



Южный математический турнир, 2011 г.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы парабола задавалась уравнением $y = x^2$.

Это можно сделать всегда, так как преобразованием подобия любую параболу можно перевести в любую другую: для этого достаточно перевести директрису и фокус первой параболы в директрису и фокус второй. При преобразовании подобия окружность переходит в окружность, поэтому утверждение задачи достаточно доказать для параболы $y = x^2$.

От участников конкурса не требовалось воспроизводить этот текст.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Если точки $A(a;\ a^2)$, $B(b;\ b^2)$, $C(c;\ c^2)$ и $D(d;\ d^2)$ лежат на одной окружности, а отрезки AB и CD пересекают ось параболы, то середины этих отрезков лежат на прямых, параллельных оси параболы и симметричных относительно неё.

Доказательство. Первый способ. Пусть $(m;\ n)$ – центр данной окружности, r – её радиус. Тогда координаты точек пересечения параболы и окружности являются решениями системы $\begin{cases} y = x^2, \\ (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \end{cases}$. Подставим значение y во второе уравнение. Заметим, что после преобразований получится уравнение вида $P_4(x) = 0$, где $P_4(x)$ – многочлен четвёртой степени, у которого коэффициент при x^3 равен нулю. По теореме Виета это означает, что $a + b + c + d = 0$. Следовательно, $\frac{a+b}{2} = -\frac{c+d}{2}$, то есть абсциссы середин хорд AB и CD противоположны. А это равносильно утверждению леммы (см. рис. 5).

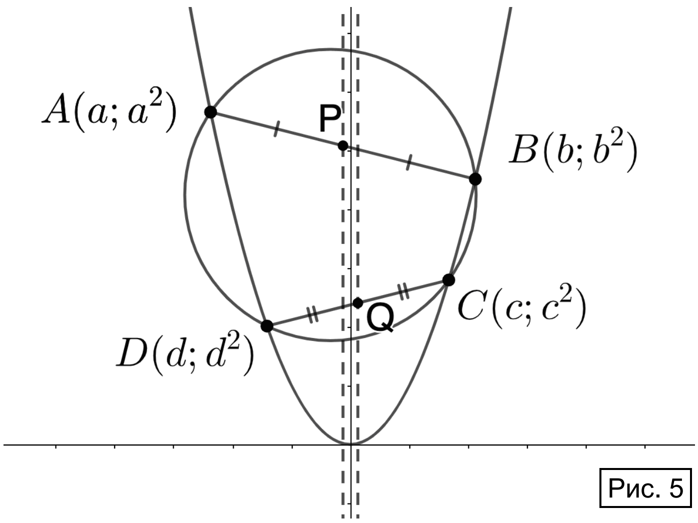


Рис. 5

Второй способ. Если центр окружности лежит на оси параболы, то вся картинка симметрична относительно оси, поэтому доказываемое утверждение выполняется.

Пусть центр окружности не лежит на оси (см. рис. 5). Угловой коэффициент прямой *AB* равен $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$. Поэтому уравнение любой прямой, перпендикулярной к *AB*, имеет вид $y=-\frac{1}{a+b}x+m$. Координаты середины отрезка *AB*: $\left(\frac{a+b}{2};\frac{a^2+b^2}{2}\right)$, поэтому уравнение серединного перпендикуляра к нему имеет вид: $y=-\frac{1}{a+b}x+\frac{1}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}$ (1).

Запишем аналогичные уравнения серединных перпендикуляров к отрезкам *CD* и *AC*: $y=-\frac{1}{c+d}x+\frac{1}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}$ (2), $y=-\frac{1}{a+c}x+\frac{1}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}$ (3). Найдём двумя способами абсциссу центра окружности. Сначала вычтем из третьего уравнения первое: $\frac{1}{a+b}x-\frac{1}{a+c}x+\frac{c^2-b^2}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{2}$ (4). Затем вычтем из третьего уравнения второе: $\frac{1}{c+d}x-\frac{1}{a+c}x+\frac{a^2-d^2}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{(c+d)(a+c)(a+d)}{2}$ (5).

Так как $a+c\neq 0$, то из (4) и (5) следует, что $(a+b)(b+c)$ = $(c+d)(a+d)$. После раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и разложения на множители получим: $(b-d)(a+b+c+d)$ = 0. Так как $b\neq d$, то из полученного равенства следует, что $\frac{a+b}{2}=-\frac{c+d}{2}$, что и требовалось.

По доказанной лемме, так как *AB* – общая хорда двух окружностей, то середины отрезков *CD* и *EF* лежат на одной прямой, параллельной оси *Oy*, как абсциссы их середин совпадают.

Воспользуемся теперь известным фактом: две хорды параболы параллельны тогда и только тогда, когда их середины лежат на прямой, параллельной оси параболы. Действительно, параллельность прямых *CD* и *EF* равносильно равенству их угловых коэффициентов, выраженных через абсциссы концов хорд, то есть c + d = e + f, что, в свою очередь, равносильно равенству абсцисс середин хорд. Таким образом, *CD* || *EF*, что и требовалось.

Подробнее о пересечении параболы и окружности можно прочитать в статье П. Кожевникова «Антипараллели и коники», журнал «Квант», №8/2017.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

К сожалению, многие участники решали задачу, исходя из неверного предположения, что CE и DF являются отрезками.

II. Методический блок

В заданиях №№6 – 9 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№6. «Задача». В пространстве даны три неколлинеарных вектора: $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Вектор $\bar{a}$ + $\bar{b}$ коллинеарен $\bar{c}$, вектор $\bar{c}$ + $\bar{a}$ коллинеарен $\bar{b}$, вектор $\bar{b}$ + $\bar{c}$ коллинеарен $\bar{a}$. Найдите модуль вектора $\bar{a}$ + $\bar{b}$ + $\bar{c}$.

«Решение». Из условия «задачи» следует, что $2\overline{a} + 2\overline{b} + 2\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}$. значит, $x = y = z = 2$, то есть каждый данный вектор есть медиана треугольника, построенного на двух других, и проведенная к третьей стороне. Это невозможно, то есть условие задачи некорректно.

Предложил А. Иванищук

Комментарий. Ошибочность вывода «решения» о некорректности условия «задачи» возникла из найденного равенства коэффициентов $x = y = z = 2$. Такой вывод можно было сделать, если бы данные векторы были не компланарны, но это не так. По условию, сумма двух любых из них коллинеарна третьему, что означает компланарность этих векторов.

Кроме того, в «решении» не объяснена невозможность того, что «каждый вектор есть медиана треугольника, построенного на двух других и проведенная к третьей стороне», хотя само по себе это утверждение верно.

На самом деле, условие «задачи» корректно. Приведём верное решение.

Ответ*:* 0.

Решение*.* Отметим, что из второго предложения в условии следует, что данные векторы **попарно** не коллинеарны. Докажем, что $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$, откуда и будет следовать ответ. Допустим, что это не так, то есть $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ – ненулевой вектор. Тогда $\overline{d} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ коллинеарен вектору $\overline{c}$ и $\overline{d} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ коллинеарен вектору $\overline{a}$, откуда следует коллинеарность векторов $\overline{c}$ и $\overline{a}$ – противоречие.

Условия «задачи» выполняются для любых трёх неколлинеарных векторов, сумма которых равна нулевому вектору, так как из равенства $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$ следует, что сумма любых двух из этих векторов противоположна третьему, то есть ему коллинеарна. Таким образом, примером, обеспечивающим корректность условия, могут служить любые три вектора, которые можно расположить так, как показано на рис. 6.

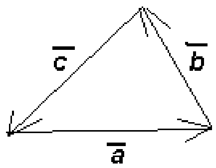


Рис. 6

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что равенство $x = y = z = 2$ неверное – 1 балл
Объяснено, почему данные вектора компланарны – 2 балла
Указано, что не обоснован вывод про медианы – 1 балл
Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл
Доказано, что сумма данных векторов равна нулевому вектору – 3 балла
Приведён пример непротиворечивости условия «задачи» – 2 балла

№7. «Задача». На доске записано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно –8. Сколько чисел записано на доске?

«Решение». Обозначим количество положительных чисел через k, а количество отрицательных чисел через l. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 4k$, $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+l} = -8l$,
$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+l} = -3(k + l)$.

Заметим, что сумма левых частей первых двух равенств даёт левую часть третьего равенства. Поэтому $4k - 8l = -3(k + l) \Leftrightarrow 7k = 5l$. При этом $40 < k + l < 48$. Однако, среди значений k, кратных 5, и значений l, кратных 7, нет чисел, сумма которых лежит в указанном интервале. Значит, задача не имеет решения.

Предложил А. Сгибнев (по материалам демоверсии ЕГЭ_2013)

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «решение» неверное. Ошибка произошла из-за того, что автор «решения» не учёл существование нулей.

Действительно, описанная в условии ситуация возможна. Пусть, например, на доске записаны число 4, семнадцать раз число –8 и двадцать шесть нулей. Всего в этом примере 44 числа, их среднее арифметическое равно $\frac{4+(-8)\cdot 17+0\cdot 26}{44}=-3$. Докажем, что количество чисел на доске не может быть другим.

Обозначим количество положительных чисел через k, количество отрицательных через l, а количество нулей через n. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 4k$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_l = -8l$. Значит, $4k - 8l = -3(k + l + n)$, откуда следует, что общее количество записанных чисел делится на 4. С учётом имеющихся ограничений получим требуемое.

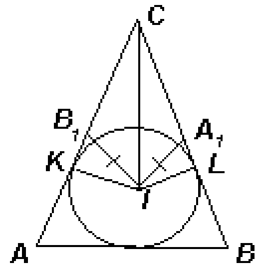
Ответ: 44.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл
Верно указана ошибка в «решении» – 2 балла
Верно указано, сколько должно быть чисел каждого вида (положительных, отрицательных и нулей) – 1 балл
Приведён пример записанных чисел, удовлетворяющих условию – 1 балл
Приведён верный ответ – 1 балл
Доказано, что этот ответ единственный – 4 балла

№8. «Задача». В треугольнике ABC равны расстояния от центра вписанной окружности до середин сторон AC и BC. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

«Решение». Пусть I – центр вписанной окружности, K и L – точки ее касания со сторонами AC и BC соответственно, B_1 и A_1 – середины этих сторон (см. рисунок). Тогда равны прямоугольные треугольники IKB_1 и ILA_1 (по катету и гипотенузе), значит, $B_1K = A_1L$. Учитывая, что $CK = CL$, получим, что $CA_1 = CB_1$, то есть $CA = CB$.



Предложил А. Блинков (по задаче из задачника В.В. Прасолова)

Комментарий. Условие «задачи» некорректно, так как доказываемое утверждение неверное. Оно выполняется только в случае, когда точки K и L лежат в одной полуплоскости относительно A_1B_1.

Приведём пример неравнобедренного треугольника, для которого выполняется условие. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = 6$, $BC = 7$, $AC = 5$, остальные точки обозначены так же, как в «решении» (см. рис. 8). Полупериметр p этого треугольника равен $(5 + 6 + 7) : 2 = 9$, поэтому $CK = CL = p - AB = 3$. Так как $CA_1 = 3{,}5$, а $CB_1 = 2{,}5$, то $B_1K = A_1L = 0{,}5$, но точки K и L лежат в разных полуплоскостях относительно A_1B_1. Вместе с тем, прямоугольные треугольники IKB_1 и ILA_1 равны (по двум катетам), значит, $IB_1 = IA_1$.

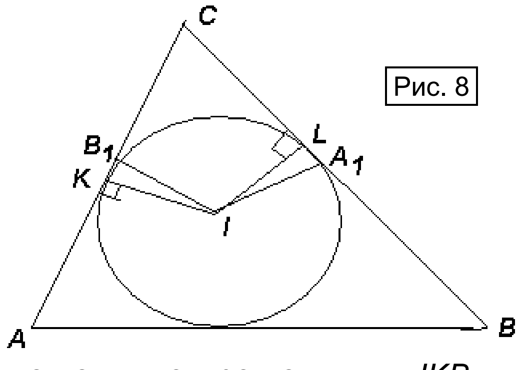


Рис. 8

Отметим, что контрпримером к утверждению «задачи» является любой неравнобедренный треугольник, в котором $AB=\frac{AC+BC}{2}$. *Такие треугольники называют разностными.*

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что утверждение «задачи» неверное – 1 балл
Указано, в каком случае оно не выполняется – 2 балла
Верно и обоснованно построен контрпример – 7 баллов

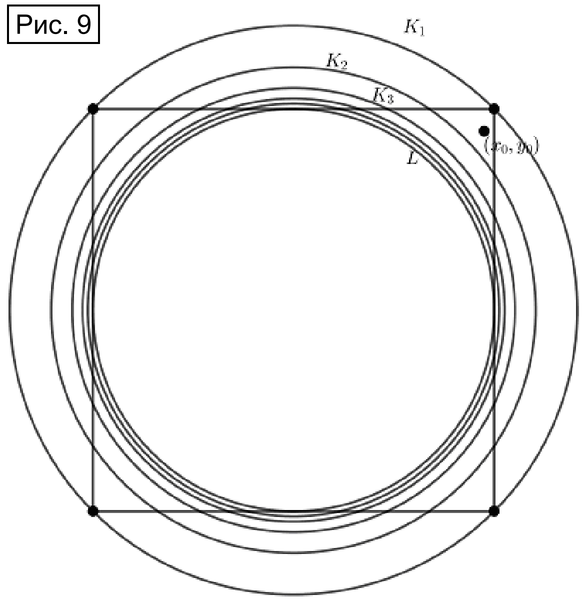
№9. «Задача». Справедлив ли «принцип вложенных кругов»: если есть такая последовательность кругов на плоскости, что каждый следующий лежит внутри

предыдущего, то у этих кругов есть общая точка, причём единственная, если радиусы кругов стремятся к нулю?
«Ответ»: справедлив.
«Решение». Рассмотрим проекции наших кругов на оси абсцисс и ординат. В обоих случаях получим последовательности вложенных отрезков, которые имеют, по известной лемме, общие точки x_0 и y_0 соответственно. Точка (x_0; y_0) и есть искомая. При стремлении радиусов кругов к нулю она будет единственной, так как единственными будут x_0 и y_0.

Предложил А. Хачатурян

Комментарий. Утверждение «задачи» верно, но предложенное доказательство считать верным нельзя. Указанная в «решении» точка действительно существует (и это верно объяснено), но не очевидно, а в общем случае даже неверно, что эта точка будет принадлежать всем кругам.

Рис. 9



Приведём пример такой ситуации. Рассмотрим квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, круг K, описанный вокруг него, и круг L, вписанный в него. Также построим последовательность вложенных концентрических кругов, начинающуюся с K и сходящуюся к L, например $K_1 = K$, а далее для любого n радиус круга K_{n+1} равен полусумме радиусов L и K_n (см. рис. 9). Тогда любая точка квадрата может оказаться на месте (x_0; y_0), если действовать по алгоритму, указанному в «решении». Но точки, достаточно близкие к углам квадрата, не принадлежат даже кругу K_2.

Приведём возможное верное решение. Пусть (x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), … – координаты центров кругов. Последовательность их абсцисс x_1, x_2, x_3, … ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Уберём часть кругов, оставив только те, абсциссы центров которых представляют собой эту подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что (x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), … и есть центры оставшихся кругов. Проделав то же самое с ординатами центров, снова перейдя к подпоследовательности и опять переобозначив, будем теперь считать, что в последовательности центров (x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), … иксы сходятся к p, а игреки – к q. Покажем, что точка M (p; q) искомая. В самом деле, пусть среди исходных кругов нашёлся такой круг K, в который точка M не входит. Рассмотрим тогда настолько маленький круг с центром в M, чтобы он не пересекал K. Впишем в этот круг квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Пусть его сторона равна 2ε. По определению предела все центры кругов (оставшихся после двух прореживаний исходной последовательности), начиная с некоторого, лежат в полосе между $x = p - \varepsilon$ и $x = p + \varepsilon$. Аналогично, все центры, начиная с некоторого, лежат и в полосе между $y = q - \varepsilon$ и $y = q + \varepsilon$. Значит, начиная с некоторого номера, все центры лежат в указанном квадрате. Этих центров бесконечно много, то есть среди них найдётся такой, номер которого в исходной последовательности был больше номера центра круга K. Но тогда найденный центр должен лежать в K, а это не так.

Если последовательность радиусов кругов сходится к нулю, то найденная нами точка единственная. В самом деле, если бы таких точек было хотя бы две, то отрезок с концами в них лежал бы в каждом круге, что невозможно, так как он имеет фиксированную длину.

Один из участников привёл очень простое и красивое доказательство существования общей точки.

Построим точку x_0 так, как указано в «решении». На прямой $x = x_0$ каждый круг высекает хорду. Применяя лемму о вложенных отрезках к этой последовательности хорд, получим искомую точку. То, что она лежит в каждом круге, очевидно. (Одна из хорд в принципе сама может оказаться точкой, но тогда и все последующие хорды будут представлять собой эту точку; она, разумеется, и будет искомой.)

Если последовательность радиусов кругов сходится к нулю, то и алгоритм из «решения» приводит к верному результату (но в обосновании, тем не менее, нуждается). В самом деле, заменим каждый круг описанным вокруг него квадратом (со сторонами, параллельными осям). Тогда точка (x_0; y_0) будет лежать во всех квадратах. Если она при этом не попала в какой-то круг K, найдём среди наших квадратов (стороны которых тоже стремятся к нулю) такой маленький, чтобы он не пересекался с *K*. Тогда вписанный в него круг лежит вне *K*, что не так.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Верно указана ошибка в «решении» – 3 балла
Приведён контрпример – 2 балла
Доказана единственность общей точки при стремлении радиусов к нулю – 1 балл
Доказано существование общей точки – 2 балла (если доказательство проведено только в случае стремления радиусов к нулю) или 4 балла (если доказательство проведено в общем случае)

№10. На олимпиаде была предложена задача: «Имеется 10 медалей: 2 золотые, 3 серебряные и 5 бронзовых. Медали из одного и того же металла неотличимы друг от друга. Сколькими способами можно разложить все 10 медалей по кругу так, чтобы одинаковые медали не лежали рядом?».

Жюри получило два разных решения с разными ответами, и оба были признаны верными.
а) Как Вы считаете, почему?
б) Воспроизведите эти решения.
в) Переформулируйте условие задачи, чтобы оно воспринималось однозначно и не требовало в тексте дополнительных пояснений.

Предложила И. Раскина по мотивам А. Шаповалова

Комментарий. а) Условие задачи сформулировано так, что нельзя однозначно ответить на вопрос: «если круг повернуть, это будет тот же способ или другой?». В зависимости от ответа на него получаются две разные задачи с различными решениями и ответами.

б) 1) Способы, переходящие друг в друга при повороте, считаются одинаковыми.

Решение. Бронзовых медалей столько же, сколько остальных. Чтобы бронзовые медали не оказались лежащими рядом, они должны строго чередоваться с не бронзовыми. На пяти оставшихся местах лежат две золотые и три серебряные медали. Золотые либо лежат на двух соседних из этих пяти мест (все такие расположения считаются одним и тем же способом), либо нет (нетрудно убедиться, что все такие расположения также переходят друг в друга при повороте). Таким образом, существует два способа разложить медали.

Ответ: 2.

2) Способы, переходящие друг в друга при повороте, считаются различными.

Решение. Зафиксируем позиции по кругу, пронумеровав их числами от 1 до 10. Разложим сначала бронзовые медали. Они строго чередуются с остальными, поэтому для этого есть всего два варианта (либо все они на чётных местах, либо на нечётных). Золотые и серебряные медали можно размещать в промежутках как угодно. Если разместить пару золотых медалей на каких-то из оставшихся пяти мест, то способ полностью задан. А для этого есть $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ способов. Так как количество способов выбрать эту пару не зависит от того, где именно лежат бронзовые медали, то всего есть $2\cdot 10=20$ способов разложить медали.

Ответ: 20.

в) Вариант формулировки, которому соответствует второе решение: «Дан десятиугольник. Сколькими способами можно разложить в его вершинах 2 золотых, 3 серебряных и 5 бронзовых медалей так, чтобы в концах каждой стороны лежали медали из разных металлов?».

Возможно и другие варианты.

Критерии проверки (*баллы а) – в) суммируются*).

а) Верно указано, почему два разных решения могли считаться верными – 2 балла

б) Приведены верные обоснованные решения – по 3 балла за каждое

В решении 2) получен ответ 10 (забыто умножение на 2) – 1 балл вместо 3

в) Приведён вариант формулировки – 2 балла

Повторение формулировки из условия с добавлением фразы типа «Варианты, переходящие друг в друга при повороте, считаются различными» – 0 баллов