XX Творческий конкурс учителей по математике
Условия, решения, комментарии и критерии проверки
Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

№1. На курсе 10 учебных групп, в каждой из которых по 20 студентов. Все 200 студентов произвольным образом стали по кругу. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

Фольклор, предложил П. Бибиков

•**Решение.** Пронумеруем группы и будем поочерёдно назначать в них старост, а обоим соседям каждого нового старосты выдавать жёлтую карточку. После выбора старост в n группах жёлтые карточки имеют не более $2n$ студентов (возможно и менее, если кто-то получил жёлтую карточку дважды). При $n \le 9$ жёлтых карточек не более 18, а студентов в группах по 20. Поэтому в каждой группе в момент выбора в ней старосты найдётся студент без жёлтой карточки. Его и назначим старостой.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Приведён верный алгоритм выбора старост, но отсутствует доказательство того, что он работает – 2 балла
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. Дима придумал новое свойство функций. Определение. Функция $f(x)$ называется *неспешной* на данном промежутке, если для любых различных точек x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство $|x_1 – x_2| > |f(x_1) – f(x_2)|$. Для функции $f(x) = x^2$ найдите максимальный интервал *неспешности (который не содержится ни в каком другом интервале неспешности*).

Д. Шноль

Ответ: (– 0,5; 0,5).

Решение. На промежутке неспешности I должно выполняться следующее условие.
$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| > |x_1^2 - x_2^2| \quad \Leftrightarrow 1 > |x_1 + x_2|$. Иными словами, необходимо, чтобы модуль суммы любых двух различных чисел, принадлежащих данному промежутку, был меньше 1. Заметим, что интервал (– 0,5; 0,5) удовлетворяет этому условию. Действительно, для любых x_1 и x_2 из этого интервала $– 0,5 < x_1 < 0,5$ и $– 0,5 < x_2 < 0,5$, откуда $– 1 < x_1 + x_2 < 1$.

Можно обосновать иначе: $|x_1| + |x_2| < 1$, *а* $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$.

При этом, любой интервал $(\alpha; \beta)$, в котором $\alpha < – 0,5$ или $\beta > 0,5$, указанному условию не удовлетворяет. Например, если $\beta > 0,5$, то существуют два различных числа из интервала $(0,5; \beta)$, для которых требуемое условие не выполняется. Аналогично и для $\alpha < – 0,5$.

Отметим, что у заданной функции искомый интервал единственный.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Приведён верный ответ, объяснено, почему этот интервал максимален, но не объяснено, почему этот интервал удовлетворяет условию – 6 баллов
Приведён верный ответ, объяснено, почему он удовлетворяет условию, но не объяснено, почему этот интервал максимален – 4 балла
Приведён только верный ответ – 2 балла
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Найдите все такие числа N, которые можно представить в виде $N = a^2 + ab + b^2$, но нельзя представить в виде $N = c^2 - cd + d^2$, где a, b, c и d – натуральные числа.

Фольклор, предложил А. Иванищук

Ответ: таких чисел нет.

Решение. Пусть $c = a + b$, $d = b$. Тогда $c^2 - cd + d^2 = (a + b)^2 - (a + b)b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ab - b^2 + b^2 = a^2 + ab + b^2$.

Отметим, что найти решение поможет геометрическая интерпретация. Рассмотрим квадрат со стороной a + b = c и двумя способами выразим площадь заштрихованной фигуры (см. рис. 3а). Кроме того, полученное равенство отражает два способа выразить квадрат расстояния между двумя не соседними узлами треугольной решетки (см. рис. 3б).

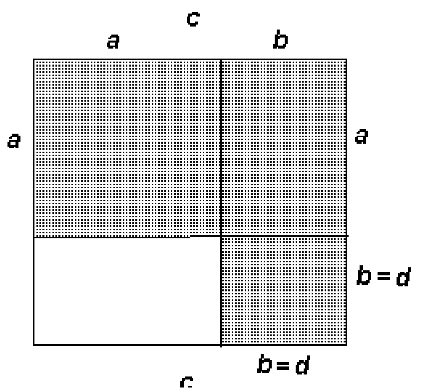


Рис. 3а

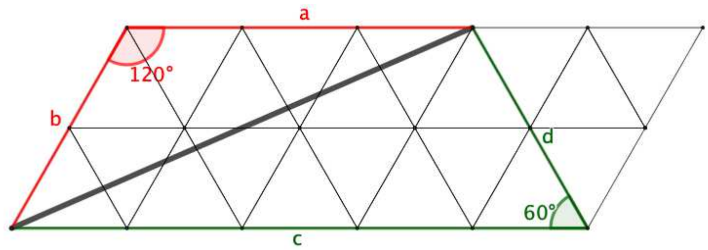


Рис. 3б

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведён верный ответ, решение отсутствует, но присутствует идея рассмотреть треугольники с углами 60° и 120° – 2 балла.

Приведен только верный ответ – 1 балл

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№4. Найдите все такие натуральные k и m, что $(k + 1)^k = 2k^m + 3k + 1$.

Фольклор

Ответ: $k = 3$, $m = 3$.

Решение. 1) Если $k = 1$, то получим неверное равенство $2 = 6$.

2) Если $k = 2$, то получим равенство $9 = 2{\cdot}2^m + 7$, которое не выполняется ни при каких натуральных m.

3) Если $m = 1$, то получим равенство $(k + 1)^k = 5k + 1$. Подстановкой убеждаемся, что оно неверно при $k = 1$ и $k = 2$, а при $k > 2$ его левая часть больше правой.

4) Если $m \geq 2$ и $k \geq 3$, то, используя бином Ньютона, преобразуем данное уравнение к виду: $k^k + k{\cdot}k^{k-1} + \ldots + k{\cdot}k = 2k^m + 3k$. Его левая часть кратна k^2, следовательно, и правая часть должна быть кратна k^2. Значит 3 кратно k, то есть $k = 1$ или $k = 3$. Первый случай невозможен, а при $k = 3$ получим: $64 = 2{\cdot}3^m + 10$, откуда $m = 3$.

Вместо использования бинома Ньютона можно записать данное уравнение в виде $(k + 1)^k - 1 = 2k^m + 3k$, разложить левую часть на два множителя и провести рассуждения, аналогичные 4).

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Приведен только верный ответ – 1 балл

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

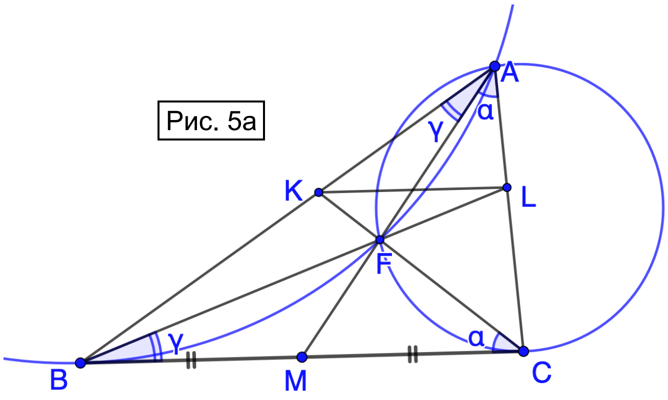
№5. В треугольнике ABC через точку F проведены чевианы AM, BL, CK, причем $\angle CBL =$

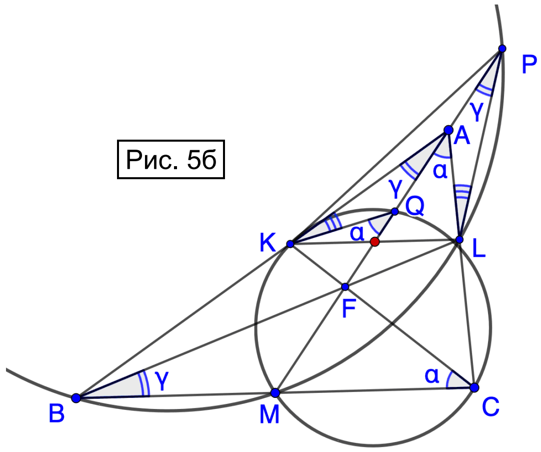
$\angle BAM$, $\angle BCK = \angle CAM$. Окружности, описанные около треугольников *BML* и *CMK*, пересекают прямую *AM* в точках *P* и *Q*. Докажите, что *A* – середина отрезка *PQ*.

А. Гаркавый

Решение. Из равенств углов в условии следует, что *BC* – общая касательная к описанным окружностям треугольников *ABF* и *ACF* (см. рис. 5а). Их общая хорда *AF* делит отрезок общей касательной пополам, поэтому *AM* – медиана треугольника *ABC*.

Если все четыре указанных в условии угла между собой равны, то точки *P* и *Q* совпадают с *A*, и доказывать нечего. Иначе пусть $\angle CBL = \angle BAM = \gamma < \alpha = \angle BCK = \angle CAM$. Тогда *Q* лежит на отрезке *AM*, а *P* – на его продолжении за точку *A* (см. рис. 5б).





По теореме Чевы для треугольника *ABC*: $\frac{BK}{KA}\cdot\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CM}{MB} = 1$. Следовательно, $\frac{AK}{KB}=\frac{AL}{LC}$, поэтому *BLKC* – трапеция. Значит, медиана *AM* делит *KL* пополам. Тогда равны длины перпендикуляров, опущенных из точек *K* и *L* на прямую *AM*. Кроме того, $\angle BAM = \angle MBL = \angle MPL$ (последнее равенство – вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Из равенства указанных перпендикуляров и равенства углов *BAM* и *APL* следует, что *AK* = *PL*. Из аналогичного равенства углов: $\angle MAC = \angle MCK = \angle MQK$ следует, что равны углы *AKQ* и *ALP*. Тогда равны треугольники *AKQ* и *PLA* (по стороне и двум углам), откуда и следует равенство *AP* = *AQ*.

Равенство треугольников AKQ и PLA можно обосновать иначе. У них соответственно равны два угла и равны высоты, проведённые из вершин K и L, так как они проводятся к прямой, содержащей медиану ABC.

После того, как доказано, что BKLC – трапеция, можно рассуждать иначе (см. рис. 5б). По теореме синусов из треугольников APL и AQK получим: $\frac{AP}{\sin(\alpha-\gamma)}=\frac{AL}{\sin\gamma}$ *и* $\frac{AQ}{\sin(\alpha-\gamma)}=\frac{AK}{\sin\alpha}$. *Значит, достаточно доказать, что* $\frac{AL}{\sin\gamma}=\frac{AK}{\sin\alpha} \Leftrightarrow AL\sin\alpha = AK\sin\gamma$.

Заметим, что треугольники BKF и CLF равновелики. Треугольники BMF и CMF также равновелики, а тогда равновелики и треугольники AKF и ALF. Отношение их площадей равно $\frac{0{,}5AL\cdot AF\sin\alpha}{0{,}5AK\cdot AF\sin\gamma}$ = $\frac{AL\sin\alpha}{AK\sin\gamma}$ *= 1, что и требовалось.*

Отметим также, что точка F – проекция ортоцентра треугольника ABC на медиану AF (её иногда называют точкой Шалтая).

<u>Критерии проверки</u>.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Задача не решена, но есть частичные продвижения (баллы суммируются):

Доказано, что AM – медиана -- 2 балла

Доказано, что BKLC – трапеция -- 2 балла

Доказано, что треугольники AKQ и PAL обладают одинаковыми наборами углов (подобны) – 2 балла
Задача не решена, перечисленных продвижений нет – 0 баллов
Задача решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок

В заданиях №№6 – 9 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№6. «Задача». Спортивный магазин провёл акцию «Не имей сто рублей, а имей сто друзей». Она заключалась в следующем: если покупатель, который приобрёл велосипед «Дружок», привёл 5 друзей, которые приобретали такой же велосипед, то приведшему деньги возвращались. За время проведения акции 25 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые привели ровно по 5 новых покупателей, а остальные 217 не привели ни одного. Сколько участников акции ездят на велосипеде бесплатно?

«Решение». Из условия следует, что 217 – это те кто не привел друзей, и те, кого привели другие. Пусть x человек привели друзей, y человек не привели друзей. Тогда всего приведено $5x$ друзей. Значит, введённые переменные удовлетворяют системе уравнений: $x + y = 25$; $5x + y = 217$. Вычитая первое уравнение из второго, получим, что $x = 48$. Но это невозможно, так как тогда $y < 0$. Следовательно, задача не имеет решения.

Предложили А. Иванищук, С. Червяков

Комментарий. Условие «задачи» корректно. «Решение» неверное. Ошибка: автор «решения» считает, что пришли 25 человек, из которых кто-то привел друзей, а кто-то нет. И на этом описанная процедура закончилась. Но друзей могли приводить и уже ранее приведенные покупатели. Приведём верное решение.

Пусть количество покупателей, каждый из которых привёл по 5 друзей, равно x. Тогда приведённых покупателей $5x$, еще 25 человек пришли сами, значит, всего покупателей было $25 + 5x$. С другой стороны, x человек привели новых клиентов, а 217 – не привели, то есть всего участников акции было $x + 217$. Таким образом, $25 + 5x = x + 217$, откуда $x = 48$. Ответ: 48.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Верно определена корректность условия «задачи» – 2 балла
Верно объяснена ошибка в «решении» – 2 балла
Приведено верное решение – 6 баллов

№7. «Задача». При всех значениях параметров a и b решите уравнение $a\sin x + b\cos x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

«Ответ»: $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, где $k\in Z$.

«Решение». Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, тогда $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = 0{,}5$, то есть $\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = 0{,}5$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Следовательно, $\sin(x+\alpha) = 0{,}5$; $x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k - \alpha$, где $k\in Z$.

Предложил А. Иванищук

Комментарий. Условие «задачи» корректно. «Решение» неверное и получен неверный «ответ». Укажем допущенные ошибки. 1) Не рассмотрен случай $a = b = 0$. 2) Не рассмотрен случай $a = 0$, $b \neq 0$. 3) После деления на $\sqrt{a^2+b^2}$ в правой части уравнения получено неверное число. 4) Неверно определен вспомогательный аргумент α, который действительно связан с arctg$\frac{b}{a}$, но равен ему только при $a > 0$, так как $\cos\alpha > 0$, что согласуется с областью значения функции arctgt: $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. В случае $a < 0$ $\cos\alpha < 0$ и вспомогательный аргумент не лежит в этом промежутке и он равен π + arctg$\frac{b}{a}$.

Приведём верное решение. 1) В случае $a = b = 0$ $x\in R$. 2) В случае $a = 0$, $b > 0$ или $b = 0$, $a > 0$ $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. В случае $a = 0$, $b < 0$ или $b = 0$, $a < 0$ $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. 3) В случае $a \neq 0$, $b \neq 0$ $\sin(x+\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $\begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k - \alpha$, где $k\in Z$, $\alpha = arctg\frac{b}{a}$ при $a > 0$, $\alpha = \pi + arctg\frac{b}{a}$ при $a < 0$.

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).

Указаны ошибки 1), 2),3)и 4) – по 1 баллу за каждую
Объяснена суть ошибки 4) – 1 балл
Приведено верное решение – 5 баллов

№8. «Задача». Положительные числа x, y и z удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases}x^2+y^2+xy=9,\\ z^2+x^2+xz=144,\\ y^2+z^2+yz=196\end{cases}$. Найдите $x + y + z$.

«Ответ»: $\sqrt{\frac{349+\sqrt{10005}}{2}}$.

«Решение». Отложим от точки O отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ так, чтобы углы AOB, BOC, COA были равны по 120°. Из условия, используя теорему косинусов, получим: $AB = 3$, $CA = 12$, $BC = 14$. Повернём вокруг точки A на 60°против часовой стрелки точки O и B. Пусть они перешли в точки O_1 и B_1 ответственно. Тогда треугольники AOO_1 и ABB_1 равносторонние, откуда $\angle COO_1 = 180°$. Так как $\Delta AOB = \Delta AO_1B_1$, $\angle OO_1B_1 = 180°$, то точки C, O, O_1 и B_1 лежат на одной прямой, при этом $OO_1 = x$, $B_1O_1 = y$, следовательно, $CB_1 = x + y + z$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Из теоремы косинусов $\cos\alpha = -\frac{43}{72}$, тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3335}}{72}$, $\cos\angle B_1AC = \cos(60° + \alpha) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{43}{72}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3335}}{72}$, откуда по теореме косинусов $B_1C^2 = 9 + 144 - 72\cos\angle B_1AC = \frac{349+\sqrt{10005}}{2}$.

Предложил И. Зубков

Комментарий. Условие «задачи» некорректно, так как положительных решений у данной системы нет. Её «решение» неверное, так как его автор рассуждает о несуществующем объекте.

Если бы у данной системы была хотя бы одна положительная тройка решений, по ней можно было бы построить треугольник ABC так, как описано в «решении». Точка O в этом случае была бы его точкой Ферма – Торричелли. Однако в рассмотренном треугольнике $\cos\angle BAC = -\frac{43}{72} < -\frac{1}{2}$, поэтому $\angle BAC > 120°$. В таких треугольниках точки Ферма – Торричелли нет. В самом деле, $120° = \angle BOC > \angle BAC > 120°$ – противоречие.

Некоторые участники алгебраически доказали, что система не имеет положительных решений и проигнорировали текст «решения», то есть не показали суть допущенной ошибки. В этом случае жюри считает, что задание выполнено формально.

Отдельно отметим, что приведённое «решение» показывает наличие (и единственность) решения системы с положительными y и z и отрицательным x, и именно сумма компонентов этого решения в нём вычислена.

Критерии проверки.

Верно и полностью объяснена ошибка в «решении», из чего сделан обоснованный вывод о некорректности условия «задачи» – 10 баллов

Ошибка в «решении» объяснена, но никаких выводов о корректности условия «задачи» не сделано – 7 баллов

Алгебраически доказано, что система не имеет положительных решений, но никак не указано, в чём проблема в приведённом геометрическом решении – 5 баллов

Указано, но никак не обосновано, что условие «задачи»некорректно – 1 балл

№9. «Задача». На балу никакой юноша не танцевал со всеми девушками, а каждая девушка танцевала хотя бы с одним юношей. Докажите, что среди присутствовавших на балу можно найти двух юношей и двух девушек так, что каждый из этих двух юношей танцевал лишь с одной из этих двух девушек, а каждая из этих двух девушек танцевала лишь с одним из этих двух юношей.

«Решение». Сначала уберем из рассмотрения всех юношей, которые не танцевали ни с одной из девушек. После этого уберем из рассмотрения всех девушек, которые танцевали с каждым из оставшихся юношей. Какие-то девушки после этого останутся, иначе каждый из оставшихся юношей танцевал бы со всеми девушками, что противоречит условию. Выберем из оставшихся девушек ту, которая танцевала с наибольшим количеством юношей, обозначим ее $Д_1$. Какой-то из оставшихся юношей не танцевал с $Д_1$, обозначим его $Ю_2$. При этом $Ю_2$ танцевал хотя бы с одной девушкой, обозначим ее $Д_2$. Тогда $Д_2$ не могла танцевать со всеми юношами, с которыми танцевала $Д_1$, иначе она танцевала бы с большим количеством юношей, чем $Д_1$, что противоречит выбору $Д_1$. Пусть $Ю_1$ – юноша, с которым танцевала $Д_1$, но не танцевала $Д_2$. Тогда $Ю_1$, $Ю_2$, $Д_1$, $Д_2$ образуют искомую четверку.

Предложил А. Грибалко

Комментарий. Условие задачи корректно. Решение неверное. Рассмотрим утверждение «При этом $Ю_2$ танцевал хотя бы с одной девушкой, обозначим ее $Д_2$». Действительно, $Ю_2$ танцевал хотя бы с одной девушкой, иначе был бы убран при первом исключении скромных юношей. Но все девушки, с которыми он танцевал, могли оказаться убранными при втором исключении активных девушек, в таком случае на роль $Д_2$ никто не годится.

Однако идея начать выбор подходящей четвёрки с кого-то «самого-самого …» (то есть. использовать «принцип крайнего») сама по себе хорошая. Приведём два основанных на ней верных решения.

Решение 1. Рассмотрим самую застенчивую девушку, – ту, которая танцевала с наименьшим числом юношей. Если таких несколько, то любую из них. Назовём её $Д_1$. Юношу (любого), который с ней танцевал (по второму условию такой точно есть), назовём $Ю_1$. Девушку, с которой не танцевал $Ю_1$ (по первому условию такая есть), назовём $Д_2$. Теперь рассмотрим такого юношу $Ю_2$, который танцевал с $Д_2$, но не с $Д_1$. Он точно есть, ведь если бы все партнёры $Д_2$ танцевали бы и с $Д_1$, то у $Д_2$ партнёров было бы строго меньше, чем у Д$_1$ (так как с Ю$_1$ она точно не танцевала), а тогда бы Д$_1$ не была самой застенчивой. Искомую четвёрку образуют Ю$_1$, Ю$_2$, Д$_1$ и Д$_2$.

Решение 2. Рассмотрим юношу-чемпиона, который танцевал с наибольшим числом девушек. Если таких несколько, то любого из них. Назовём его Ю$_1$. Девушку (любую), которая с Ю$_1$ не танцевала (по первому условию такая есть), назовём Д$_2$. Юношу, с которым танцевала Д$_2$ (по второму условию такой есть), назовём Ю$_2$. Этот Ю$_2$ не мог танцевать ещё и со всеми девушками, с которыми танцевал Ю$_1$, иначе Ю$_1$ не был бы чемпионом. Девушку, с которой Ю$_1$ танцевал, а Ю$_2$ нет, назовём Д$_1$. Искомую четвёрку образуют Ю$_1$, Ю$_2$, Д$_1$ и Д$_2$.

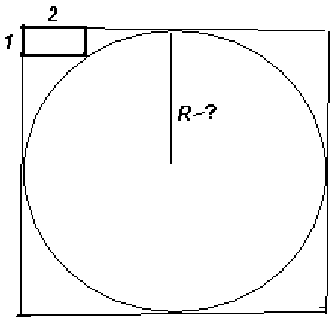
Критерии проверки (*баллы за 1) и 2) суммируются*).

1) Верно объяснена ошибка в «решении» – 4 балла

2) Приведено верное обоснованное решение – 6 баллов

Приведённое решение основано на многократном поочерёдном убирании не танцевавших юношей и девушек, танцевавших со всеми оставшимися юношами, но не доказано, что в итоге останется не менее двух юношей и не менее двух девушек – 3 балла

№10. На самостоятельной работе было предложено решить задачу по готовому чертежу (см. рисунок). Ученик предложил решение, в котором сразу записал уравнение $2R - 1 = (R - 2)^2$. После упрощения получил квадратное уравнение, корни которого 1 и 5. Отбросил корень 1 и дал ответ $R = 5$.



1) Как мог рассуждать ученик, получая такое уравнение? Постарайтесь найти несколько версий.

2) Предложите решение, использующее более общеизвестный факт школьного курса геометрии и приводящее к равносильному уравнению.

3) Почему корень R = 1 следовало отбросить? Какой геометрический смысл он мог бы иметь?

Предложил А. Блинков

Комментарий. 1) Приведём несколько вариантов рассуждений, которые могли привести к составлению указанного уравнения.

А) Проведём диаметр AB и хорду CD, продлив большую сторону прямоугольника, так как показано на рис. 10а, P – точка их пересечения. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, Учитывая, что $PA = 1$, $PB = 2R - 1$, $PC = PD = R - 2$, получим указанное уравнение.

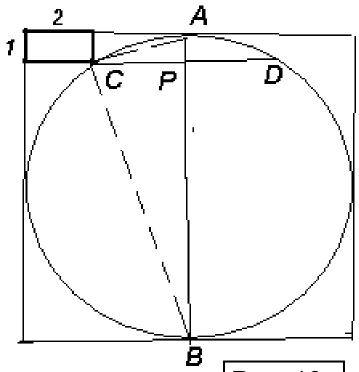


Рис. 10а

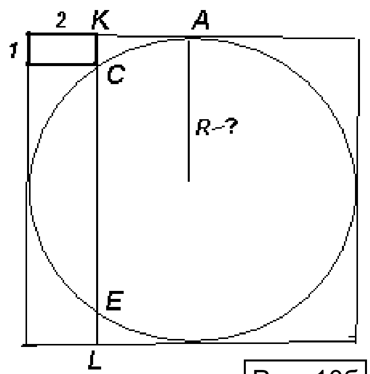


Рис. 10б

Б) Если на этом же чертеже провести отрезки AC и BC, то можно трактовать уравнение ученика иначе. Угол ACB – прямой, поэтому CP – высота прямоугольного треугольника ACB, проведённая к гипотенузе. Она является средним пропорциональным проекций катетов на гипотенузу, поэтому $CP^2 = PA \cdot PB$. Получим тоже самое уравнение, записанное справа налево.

В) Продлим меньшую сторону прямоугольника и введём обозначения так, как показано на рис. 10б. По теореме о квадрате касательной $KA^2 = KE \cdot KC$. Учитывая, что $KA = R - 2$, $EL = KC = 1$, $KE = 2R - 1$, вновь получим такое же уравнение, записанное справа налево.

В всех случаях множитель 1 не записан, так как не влияет на дальнейшие преобразования.

2) Общеизвестным фактом является теорема Пифагора, которую можно использовать для треугольника OCP (см. рис. 10в): $OC^2 = OP^2 + CP^2$, то есть $R^2 = (R - 1)^2 + R - 2)^2$. После упрощения получится уравнение $R^2 - 6R + 5 = 0$, равносильное уравнению, указанному в условии.

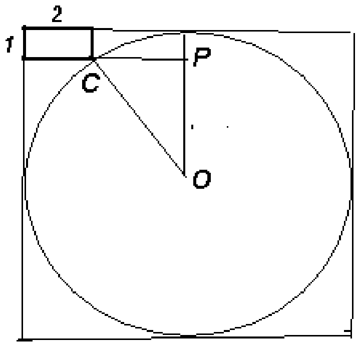


Рис. 10в

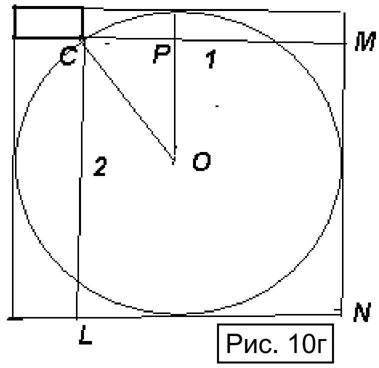


Рис. 10г

3) Чертёж в условии задачи предполагает, что $R > 2$, поэтому корень $R = 1$ отброшен.

Его наличие означает возможность другого расположения прямоугольника со сторонами 2 и 1. Заметим, что уравнение, составленное в пункте 2), можно записать так: $R^2 = (1 - R)^2 + (2 - R)^2$. Казалось бы, если вершины такого прямоугольника – точки C, L, N и M (см. рис. 10г), то такое уравнение опять получится по теореме Пифагора для треугольника OCP. Но при $R = 1$ этот треугольник вырождается. Поэтому значение $R = 1$ возникает только в случае, когда прямоугольник со сторонами 2 и 1 является «верхней» половиной квадрата со стороной 2.

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).

Верно объяснены возможные рассуждения, непосредственно приводящих к указанному уравнению – по 2 балла за каждое

Приведено решение, использующее теорему Пифагора – 2 балла

Объяснено, почему отброшен корень $R = 1$ – 1 балл

Верно объяснён возможный геометрический смысл отброшенного корня – 1 балл