XXII Творческий конкурс учителей по математике
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи.

№1. Решите уравнение: $|x - 2025| + |x + 2025| = 2|x|$.

А. Блинков (по мотивам фольклора)

Ответ: $(-\infty; -2025] \cup [2025; +\infty)$.

Решение. Первый способ. Числа –2025, 0 и 2025 разбивают числовую прямую на 4 промежутка, но функции, стоящие в обеих частях уравнения, чётные, поэтому множество решений уравнения симметрично относительно нуля. Следовательно, достаточно рассмотреть два промежутка.

1) Если $0 \leq x < 2025$, то $2025 - x + x + 2025 = 2x$, откуда $x = 2025$, но это значение не входит в рассматриваемый промежуток.

2) Если $x \geq 2025$, то $x - 2025 + x + 2025 = 2x$, откуда $x \in [2025; +\infty)$.

Второй способ. На координатной прямой рассмотрим точки $O(0)$, $A(-2025)$, $B(2025)$. Решениями данного уравнения являются значения x, для которых сумма расстояний от точки $M(x)$ до точек A и B вдвое больше расстояния от M до O.

Заметим, что O – середина AB, поэтому если M лежит внутри отрезка AB, то равенство выполняться не может: $MA + MB = AB$, а $2MO < AB$. Если же M лежит вне отрезка AB или совпадает с A или с B, то равенство выполняется. Действительно, пусть например, M левее A, тогда $MA = MO - 0{,}5AB$, $MB = MO + 0{,}5AB$.

Случай, когда M лежит правее B, симметричен рассмотренному, а если M совпадает с A или с B, то справедливость равенства очевидна.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два корня, расстояние между которыми больше, чем 2025. Докажите, что уравнение $f(x) + f(x + 1) + ... + f(x + 2024) + f(x + 2025) = 0$ имеет два различных корня.

Фольклор

Решение. Пусть, например, у трёхчлена $f(x)$ положительный первый коэффициент и его корни x_1 и x_2 таковы, что $x_2 - x_1 > 2025$ (см. рис. 2а).

В левой части уравнения – также квадратный трёхчлен, для которого $f(x_1) + f(x_1 + 1) + ... + f(x_1 + 2024) + f(x_1 + 2025) < 0$ (первое слагаемое равно нулю, а остальные слагаемые отрицательные), а $f(x_2) + f(x_2 + 1) + ... + f(x_2 + 2024) + f(x_2 + 2025) > 0$ (первое слагаемое равно нулю, а остальные слагаемые положительные). Так как этот трёхчлен принимает значения разных знаков, то его график пересекает ось абсцисс, но график – парабола, поэтому точек пересечения – две. Следовательно, уравнение имеет два корня.

Если у трёхчлена $f(x)$ отрицательный первый коэффициент, то рассуждения аналогичны с точностью до перемены знаков: в точке x_1 левая часть уравнения положительна, а в точке x_2 – отрицательна (см. рис. 2б).

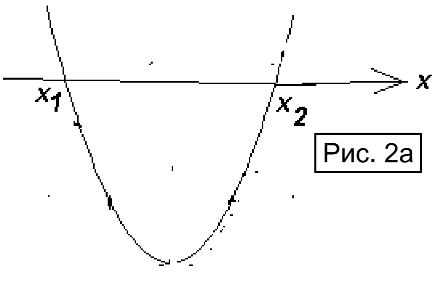


Рис. 2а

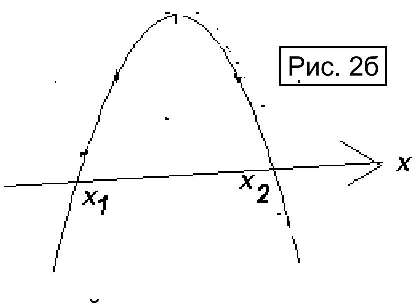


Рис. 2б

Ту же идею можно реализовать иначе. Заметим, что в левой части уравнения – также квадратный трехчлен, причём его старший коэффициент имеет тот же знак, *что и f(x). Допустим, этот знак «+», то есть ветви обеих парабол направлены вверх. Тогда для доказательства того, что уравнение имеет два корня, достаточно найти какую-нибудь любую точку x_0, в которой левая часть уравнения принимает отрицательное значение. Например, $x_0 = x_в - 2025/2$, где $x_в$ – абсцисса вершины параболы y = f(x).*

В случае знака «–» (ветви парабол направлены вниз) значение в указанной точке будет, наоборот, положительно.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, в частности, не указано, что рассуждение не зависит от знака первого коэффициента $f(x)$ – 8 баллов

Есть верная идея решения, но оно до конца не доведено или содержит ошибки – 1-2 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Дан правильный 2025-угольник с центром *O*. Можно ли отметить 44 его вершины так, чтобы сумма векторов с началом в *O* и концами в этих вершинах была равна нулевому вектору?

Вариация задачи из Южного
математического фестиваля 2015 г.

Ответ: можно.

Решение. В любом правильном многоугольнике сумма векторов с началом в его центре и концами во всех вершинах равна нулевому вектору. Так как 2025 делится на 5 и на 3, то среди вершин исходного 2025-угольника можно, например, найти вершины четырёх правильных пятиугольника и восьми правильных треугольников с центром *O*. Вместе они дадут $4 \cdot 5 + 8 \cdot 3 = 44$ указанных вектора, сумма которых равна нулевому вектору.

Осталось пояснить, как выбрать эти многоугольники так, чтобы у них не было общих вершин. Например, можно, взять 12 подряд идущих вершин исходного 2025-угольника и дополнить каждую из них до правильного пятиугольника или правильного треугольника. Тогда вершины одноимённых фигур совпасть не могут. Предположим, что у пятиугольника и треугольника какие-то вершины совпали, а точки, с которых мы начинали их строить, имеют номера *i* и *j*. Тогда $i+\frac{2025}{5}k \equiv j+\frac{2025}{3}l$ (mod 2025). Так как 2025 : 5 = 405, 2025 : 3 = 675, а НОД(405; 675) = 135, то из полученного равенства следует, что $i - j$ делится на 135, но это противоречит тому, что $0 < |i - j| < 12$.

Приведённый пример далеко не единственный. Можно выбирать один пятиугольник и 13 треугольников или 7 пятиугольников и три треугольника. Кроме того, можно приводить пример, указывая конкретные номера вершин, поясняя почему они образуют требуемые правильные многоугольники.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Верно указано количество правильных треугольников и пятиугольников, вершины которых можно выбрать, но никак не объяснено, почему у них не будет общих вершин – 5 баллов

Есть верные идеи решения, но оно до конца не доведено или в нём есть ошибки – 1-2 балла

Приведён только ответ – 0 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№4. Трём девочкам-математикам надели шляпки, на каждой – по натуральному числу не больше 25. Им это сообщили, добавив, что числа различные, и наибольшее равно *произведению* двух меньших. Видя числа других, на вопрос: «Верно ли, что у вас на шляпке *наименьшее* из чисел?» девочки одновременно ответили: Даша «Да», Нелли «Нет», Зоя «Не знаю». Найдите все варианты чисел на их шляпках.

А. Шаповалов

Ответ: У Даши 3, у Зои 18, у Нелли 6.

Решение. Пусть искомые числа: $x < y < z$, где $xy = z$. Каждая из девочек понимает, что возможное число на её шляпке равно произведению или частному двух других чисел, но только частное может быть наименьшим. У Даши – x, это частное, и она должна видеть, что произведение невозможно. Единственная причина: произведение $yz > 25$. У Зои оба возможных числа подходят, она видит число x, значит, её возможное частное меньше, чем x, а возможное произведение не больше, чем 25. Этим частным не может быть z/x, так как $z/x = y > x$. Значит, частное Зои – это y/x. Тогда у Зои на шляпке z, и выполнены два неравенства $y/x < x$ и $xy \leq 25$. Значит, у Нелли на шляпке y.

Введём обозначения: $d = y/x$, тогда $y = dx$, $z = dx^2$, $yz = d^2x^3$. Выполнены неравенства: $d < x < dx < dx^2 \leq 25 < d^2x^3$. Значит, $d = y/x > 1$, то есть $d \geq 2$. Тогда $x \geq 3$. С другой стороны, $d^3 < dx^2 \leq 25$, поэтому $d < 3$, значит, $d = 2$. Так как $2x^2 \leq 25$, то $x = 3$, тогда $y = 6$, $z = 18$.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Приведён верный ответ, показано, что он удовлетворяет условию, но не доказано, что он единственный – 4 балла

Есть верные идеи решения, но оно до конца не доведено или в нём есть ошибки – 1-2 балла

Приведён только верный ответ – 2 балла

Приведено несколько ответов, среди которых есть верный – 1 балл

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№5. Ортогональными проекциями треугольника на каждую из двух перпендикулярных плоскостей являются прямоугольные равнобедренные треугольники. Могут ли они быть неравными?

А. Блинков, Ю. Блинков

Ответ: могут.

Решение. Первый способ. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$, K – середина CC', P – середина BD (см. рис. 5). Пусть треугольник BKP проектируется на плоскости (ABC) и ($C'CD$). Тогда проекциями являются треугольники BCP и CKP' соответственно. Оба треугольника – прямоугольные и равнобедренные, но они не равны: катет первого равен гипотенузе второго.

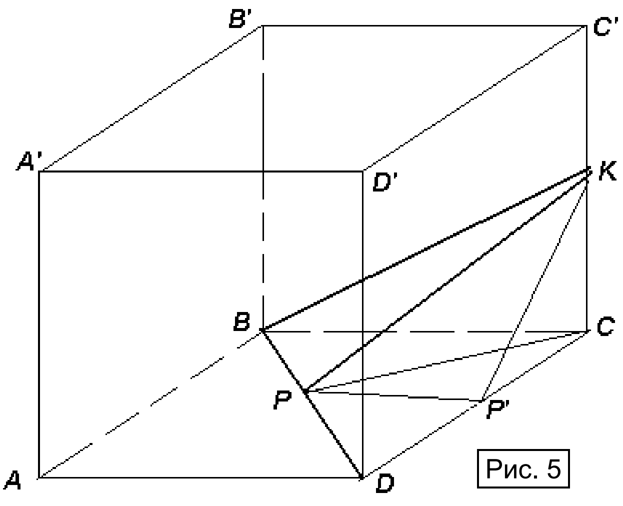


Рис. 5

Второй способ. В декартовой системе координат рассмотрим треугольник ABC: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 3; 1)$, $C(2; 1; 0)$. Пусть его проекциями на плоскости (XOY) и (XOZ) являются треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ соответственно.

Так как $A_1(0; 0)$, $B_1(1; 3)$, $C_1(2; 1)$, то $A_1B_1 = \sqrt{10}$, $B_1C_1 = A_1C_1 = \sqrt{5}$. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ – равнобедренный с прямым углом C_1.

Аналогично, $A_2(0;\ 0)$, $B_2(1;\ 1)$, $C_2(2;\ 0)$, значит, $A_2B_2 = B_2C_2 = \sqrt{2}$, $A_2C_2 = 2$. Следовательно, треугольник $A_2B_2C_2$ – равнобедренный с прямым углом B_2.

Очевидно, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ не равны.

Существуют и другие примеры, в каждом из которых вершины прямых углов являются проекциями разных аершин исходного треугольника.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов.

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Верный пример приведён, но не объяснено, почему он удовлетворяет условию – 5 баллов

Есть верные идеи решения, но оно до конца не доведено или в нём есть ошибки – 1-2 балла

Приведён только ответ – 0 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок

В заданиях №№6 – 8 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№6. «Задача». Существуют ли два натуральных числа, для которых выполняются два условия: 1) Их сумма равна 2025; 2) Если у большего числа зачеркнуть две последние цифры, то получится меньшее число.

«Ответ»: нет.

«Решение». Введя соответствующие обозначения, условие можно записать так: $\overline{abcd}+\overline{ab}$ = 2025. Так как $\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$, то это равенство можно привести к виду: $101\overline{ab}=2025-\overline{cd}$. Значит, число $2025-\overline{cd}$ делится нацело на 101. Но такого двузначного числа $\overline{cd}$ не существует.

Предложил А. Блинков

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «ответ» и «решение» неверные. Действительно, пример пары чисел, удовлетворяющих обоим условиям, подобрать несложно: 2005 и 20. Тогда понятно, из-за чего возникла ошибка в «решении»: зачеркнуть две последние цифры не означает, что зачёркнуто именно двузначное число. В данном случае, зачёркнуты цифры 0 и 5, то есть зачёркнуто однозначное число, а этот случай в «решении» не рассмотрен.

Нетрудно показать, что пример, приведённый выше, единственный.

Критерии проверки (баллы суммируются).

Указано, что «ответ» неверный – 1 балл

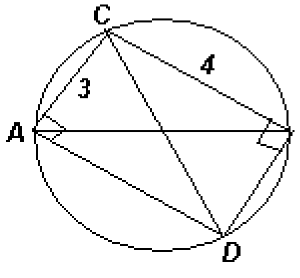
Верно объяснена суть допущенной ошибки – 4 балла

Приведено верное решение – 5 баллов

№7. «Задача». В треугольнике ABC: $AC = 3$, $BC = 4$, радиус описанной окружности равен 2,5. Найдите AB.

«Ответ»: 5.

«Решение». Первый способ. Проведём диаметр CD описанной окружности (см. рис.). Тогда $\angle CAD = \angle CBD = 90°$. Так как $CD = 2R = 5$, то $AD = 4$, $BD = 3$. Следовательно, четырехугольник $ACBD$ – параллелограмм с прямым углом, то есть $ACBD$ – прямоугольник. Тогда $\angle ACB = 90°$, поэтому $AB = 5$.



Второй способ. Из треугольника *ABC*: так как $\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}$ = 2*R* = 5, то $\sin\angle A=\frac{4}{5}$, $\sin\angle B=\frac{3}{5}$. Из того, что $\sin^2\angle A+\sin^2\angle B$ = 1, следует, что $\cos\angle B=\sin\angle A$, то есть $\angle A$ + $\angle B$ = 90°. Следовательно, $\angle C$ = 90°, значит, *AB* = 5.

Предложил Ю. Блинков

(по материалам диагностической работы для 11 класса, сентябрь 2016 г.)

Комментарий. Условие «задачи» корректно. При этом в обоих способах «решений» рассмотрены не все возможные случаи, поэтому «ответ» неверный.

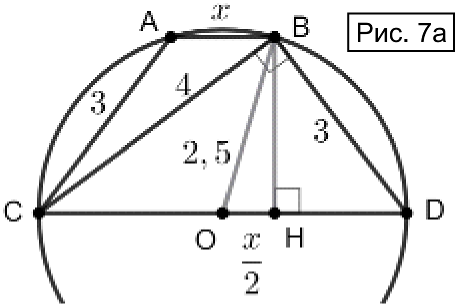


Рис. 7а

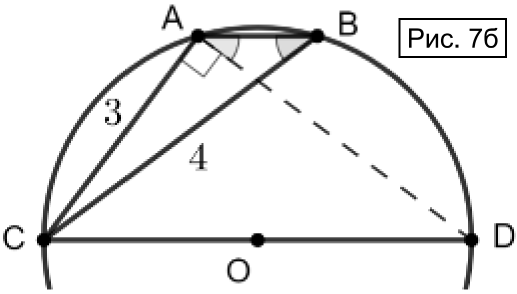


Рис. 7б

В первом способе «решения» сам по себе текст ошибок не содержит, но не учтено, что точки *A* и *B* могут находиться в одной полуплоскости относительно диаметра *CD* (см. рис. 7 а, б). Тогда, учитывая, что *CD* = 5, из из прямоугольного треугольника *CBD* по тереме Пифагора получим, что *BD* = 3 = *AC*. Следовательно, дуги *AC* и *BD* симметричны, поэтому *ACDB* – равнобокая трапеция. Проведём её высоту *BH* (см. рис. 7а). Выразив двумя способами площадь треугольника *CBD*, найдём, что *BH* = $\frac{BC\cdot BD}{CD}$ = 2,4. Из прямоугольного треугольника *OBH* (O –центр окружности) получим, что *OH* = 0,7. Из симметрии высот равнобокой трапеции, проведённых из вершин A и B следует, что *AB* = 2*OH* = 1,4.

Есть и более короткий способ вычисления. Учитывая, что AD = BC = 4, по теореме Птолемея для четырехугольника ACDB, получим AB⋅CD + AC⋅BD = BC⋅AD, откуда 5AB + 9 = 16, AB = 1,4 (см. рис. 7б).

При «решении» вторым способом пропущен случай, когда угол *A* – тупой. Действительно, из того, что $\cos\angle B=\sin\angle A$ не следует, что $\angle A$ + $\angle B$ = 90°.

На самом деле, $\sin^2\angle A+\sin^2\angle B=1\ \Leftrightarrow\ \sin^2\angle A=\cos^2\angle B\ \Leftrightarrow\ \left|\cos\angle B\right|=\left|\sin\angle A\right|$. В данном случае, так как *AC* = 3 < *BC* = 4, то $\angle B<\angle A$, поэтому угол B тупым быть не может. Значит, $\cos\angle B>0$ и $\sin\angle A>0$, то есть равенство $\cos\angle B=\sin\angle A$ выполняется. Но из него следует, что $\angle A$ + $\angle B$ = 90° или $\angle A$ – $\angle B$ = 90°. Первый случай рассмотрен в «решении», а второй случай приводит к тому, что *ACDB* – равнобокая трапеция (см. рис. 7б). Дальнейшие вычисления уже рассмотрены выше.

Таким образом верный ответ: 5 или 1,4.

Критерии проверки (баллы суммируются).

Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл

Указано, что «ответ» и «решение» неверные – 1 балл

Верно объяснены суть допущенных ошибок – по 1-2 балла в каждом способе (в зависимости от полноты)

Приведён верный ответ – 1 балл

Приведёно верное решение (верно рассмотрен второй случай в любом из способов) – 3 балла

№8. «Задача». Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге в одном направлении (против часовой стрелки). Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой они могут обгонять друг друга?

«Ответ»: могут.

«Решение». Если скорости богатырей равны 1/37,..., 33/37 круга в минуту, то условие задачи выполняется. Пусть два богатыря едут со скоростями i/37 и j/37 круга в минуту. Они встретились, когда один обогнал другого на k кругов через время t после начала движения из одной точки. Тогда $\frac{ti}{37}-\frac{tj}{37}$ = k, откуда $t(i-j) = 37k$, то есть t делится на 37 (так как 37 – простое число, а $i - j < 37$). Значит, они встретятся только через время, кратное 37 минутам, но за такое время они оба проедут полное число кругов и окажутся в одной точке.

Предложил В. Гуровиц

(по задаче 8.4 из LXXIII ММО_2010, авторы А. Клячко, Б. Френкель)

Комментарий. Условие «задачи» корректно, приведён верный «ответ», но «решение» неверное. Допущена следующая ошибка: выражение $t(i - j)$ может быть целым даже при нецелом t. Например, при $i = 3$, $j = 1$, $t = 18{,}5$ его значение равно 37. То есть между двумя обгонами первого богатыря третьим первый проезжает полкруга, а третий – полтора. Кроме того, количество k кругов, на которое один обогнал другого, не любое натуральное, а только $k = 1$.

Приведём верное решение. Рассмотрим любых двух богатырей. За время между двумя последовательными обгонами один из них проезжает на один круг больше другого. Поэтому, для того, чтобы обгоны проходили в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы отношение их скоростей имело вид $\frac{n+1}{n}$. Выберем единицу измерения так, чтобы все скорости были целыми (это возможно, потому что отношения скоростей рациональны). Тогда наибольший общий делитель любых двух скоростей будет равен их разности. Таким образом, задачу можно переформулировать, например, так.

Существуют ли 33 таких натуральных числа, что НОД любых двух равен их разности? Докажем по индукции, что для любого n существуют n таких чисел.

База. При $n = 2$ подходят числа 2 и 3.

Шаг. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию. Тогда числа A, $A - a_1$, $A - a_2$, …, $A - a_n$, где A – наименьшее общее кратное чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, также ему удовлетворяют, потому что числа A и $A - a_i$ делятся на a_i, а числа $A - a_i$ и $A - a_j$ делятся на НОД$(a_i, a_j) = |a_i - a_j|$. Следовательно, ответ на вопрос задачи положительный.

Критерии проверки (баллы суммируются).

Указано, что «ответ» верный, а «решение» неверное – 1 балл

Верно объяснена суть допущенных ошибок – 3 балла

Показано, что в верном примере отношение скоростей любых богатырей должно равняться (n+1)/n, где n – какое-то натуральное число –1 балл

Приведён верный пример скоростей, удовлетворяющих условиям задачи – 5 баллов

№9. Веня и Сеня находили первообразную функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6x-4x^2}}$.

«Решение Вени». $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{6x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{6-4x}}=\int\frac{d\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{x}\right)^2}}=arcsin\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}$.

«Решение Сени». $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{6x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}arcsin\frac{4x-3}{3}$.

Беня, наблюдавший за процессом, заметил, что результаты явно разные.

Кто из мальчиков ошибся и в чём?

Предложил А. Иванищук

Комментарий. Оба мальчика проделали верные вычисления, но каждый нашёл только одну первообразную заданной функции, то есть они забыли, что к полученному ответу надо прибавить произвольную константу.

Докажем, что полученные ими первообразные действительно отличаются на константу. Обозначим первообразные, найденные Веней и Сеней, через $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Из найденных ответов следует, что $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = -\frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $f(x)$ определена на интервале (0; 1,5), докажемм, что для всех x из этого промежутка выполняется равенство: $F_1(x) - F_2(x) = \frac{\pi}{4}$, то есть докажем, что $arcsin\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}arcsin\frac{4x-3}{3} = \frac{\pi}{4}$. После несложных преобразований получим равносильное раыенство: $2\,arcsin\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}} = \frac{\pi}{2} + arcsin\frac{4x-3}{3}$. На рассматриваемом промежутке оно, в свою очередь, равносильно равенству $\cos\left(2\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{4x-3}{3}\right)$ А это верно, так как $cos\left(2arcsin\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) = 1-2sin^2\left(arcsin\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3-4x}{3}$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{4x-3}{3}\right) = -\sin\left(\arcsin\frac{4x-3}{3}\right) = \frac{3-4x}{3}$.

Второй способ. Найдём производные полученных функций.

$$F_1'(x) = \left(arcsin\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2x}{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6x}} = \frac{1}{\sqrt{6x-4x^2}}.$$

$$F_2'(x) = \left(\frac{1}{2}arcsin\frac{4x-3}{3}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-3}{3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{4x-3}{3}\right)' = \frac{2}{3\sqrt{1-\left(\frac{4x-3}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6x-4x^2}}.$$

Так как получены одинаковые производные, то оба мальчика верно нашли первообразную с точностью до константы.

Критерии проверки (баллы суммируются).

Указано, что в ответах мальчиков отсутствует произвольная константа – 2 балла
Указано, что в вычислениях ошибок нет – 2 балла
Указано, что найденные первообразные отличаются на константу – 2 балла
Доказано, что это действительно так – 4 балла

№10. Петя придумал новое тождество $C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n-1}$. и предложил его доказательство.

Рассмотрим таблицу $2\times n$, в которой две строки и n столбцов. Расставим звёздочки в $n + 1$ клетке. Это можно сделать C_{2n}^{n+1} способами. По принципу Дирихле для каждой конкретной расстановки найдётся столбец, в обеих клетках которого находятся звёздочки. Сотрём его. В таблице останется $n - 1$ звёздочка. Но столбцов с двумя звёздочками может оказаться несколько, поэтому соответствие между расстановками $n + 1$ и $n - 1$ звёздочек в таблице получается не однозначным. Договоримся всегда стирать самый левый столбец с двумя звёздочками. Тогда каждой таблице с $n + 1$ звёздочкой соответствует ровно одна таблица с $n - 1$ звёздочкой. Теперь мы построили взаимно однозначное соответствие между способами расставить n + 1 и n – 1 звёздочку. Значит, C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n-1} .

Вася возразил: после вычёркивания столбца в таблице остаётся 2n – 2 клетки, поэтому верное равенство такое: $C_{2n}^{n+1} = C_{2n-2}^{n-1}$. Мальчики заспорили и пошли к учителю выяснять, кто прав. Учитель при объяснении смог обойтись без формулы $C_n^{\mathrm{k}} = \dfrac{n!}{k!(\mathrm{n-k})!}$. И построил объяснение на выбранном мальчиками языке клеток и звёздочек.

Ответьте на следующие вопросы, также не используя формулу для вычисления числа сочетаний, а пользуясь только их комбинаторным смыслом:

1) Какое из равенств верное?
2) Как его доказать?
3) Укажите все ошибки в приведённых мальчиками рассуждениях.

Предложил П. Кожевников (формулировка И. Раскиной)

Комментарий. 1) Верно первое (Петино) равенство. Оно является частным случаем широко известного тождества $C_n^{\mathrm{k}} = C_n^{n-k}$.

2) Рассмотрим задачу: сколькими способами можно расставить n + 1 звёздочку в 2n клеток? Клетки могут образовывать таблицу 2×n, но это необязательно: для одной строки длины n рассуждения те же самые. Выбрать n + 1 клетку для расстановки звёздочек можно C_{2n}^{n+1} способами. Но вместо этого можно выбрать n –1 клетку, в которых звёздочек не будет, это можно сделать C_{2n}^{n-1} способами. Соответствие между наборами из n + 1 клетки со звёздочками и дополняющими их наборами из n – 1 клетки без звёздочек взаимно однозначно, поэтому $C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n-1}$.

3) Петя действительно не учёл, что клеток после стирания столбца осталось не 2n, а 2n – 2, в этом Вася прав. И описанное соответствие между расстановками n + 1 и n – 1 звёздочек действительно не является однозначным. Но не только по указанной Петей причине. А ещё и потому, что из разных расстановок n – 1 звёздочки а таблице 2×(n – 1) могут при добавления столбца с двумя звёздочками получиться одинаковые таблицы 2×n. Поэтому выбор самого левого столбца не делает соответствие однозначным. И у чисел C_{2n}^{n+1} и C_{2n-2}^{n-1} нет причин оказываться равными. Этого не поняли ни Петя, ни Вася, и в итоге пришли к неверному тождеству.

Критерии проверки (баллы суммируются).

Верно указано, какое из двух тождеств верное – 1 балл
Приведено его комбинаторное доказательство – 2 балла
Указана Петина ошибка, которую заметил Вася – 1 балл
Указано, что соответствие так и не стало однозначным – 1 балл
Объяснено, почему это так – 5 баллов