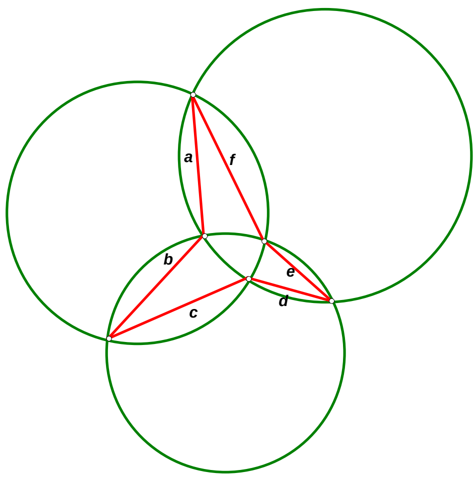
# VI Заочный конкурс учителей по математике.

**I. Решите задачи**.

**№1.** На рынке продавали раков: больших — по 5 рублей, маленьких – по 3 рубля, а также жаб — по рублю. Иван и Степан купили себе раков на одинаковые суммы денег, причем Иван купил больших и маленьких раков поровну, а Степан – вдвое меньше больших раков, чем маленьких. Иван расплатился одной сторублевой купюрой, а Степан – несколькими десятирублевыми. У продавца не оказалось мелких денег, поэтому он выдал сдачу Ивану опять же раками, а Степану – жабами. Сколько всего животных унесли приятели с рынка?

**№2.** В стране 2011 городов. Какое наименьшее количество авиалиний потребуется, чтобы из любого города добраться в любой другой, делая не более двух пересадок?

**№3.** В основании пирамиды *PABCD* расположен четырехугольник *ABCD*, в котором $AB = BC = 6$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = \angle DAC = 30°$. Каждая боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.




**№4.** Докажите, что для любых действительных чисел *a*, *b* и *c* выполняется неравенство: $|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|$.

**№5.** Даны три попарно пересекающиеся окружности, в которых последовательно соединены точки их попарного пересечения. Длины получившихся хорд равны *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f* (см. рисунок). Найдите и обоснуйте равенство, связывающее между собой данные длины хорд.

**II. Методический блок**.

**В предложенных текстах (№6 и №7) могут содержаться математические ошибки (как в «ответах», так и в «решениях»). Укажите все ошибки и если «решение» не верно, то приведите верное решение.**

**№6.** «Задача». Рассматриваются все треугольники *ABC*, у которых фиксированы длина стороны *AB* и сумма длин двух других сторон. У какого из этих треугольников высота, проведенная к стороне *AB*, имеет наибольшую длину?

«Ответ»: такого треугольника не существует.

«Решение». Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h$ и длина *AB* – фиксирована, то высота *h* имеет наибольшую длину, если $S_{ABC}$ – принимает наибольшее значение. Поскольку $S_{ABC} = pr$ и полупериметр *p* данного треугольника зафиксирован, то $S_{ABC}$ – наибольшая, если наибольшее значение принимает радиус *r* окружности, вписанной в данный треугольник. Но $r = (p - AB)tg\frac{\angle ACB}{2}$, значит, *r* принимает наибольшее значение при наибольшем значении тангенса указанного угла.

Угол $\alpha = \frac{1}{2}\angle ACB < 90°$, функция $\mathrm{tg}\alpha$ на промежутке (0; 90°) возрастает от 0 до $+\infty$, то есть наибольшего значения тангенса не существует, значит и треугольника с наибольшей длиной высоты также не существует.

**№7.** «Задача». Два артиллериста стреляют по воробью. Один попадает с вероятностью 0,2, другой – с вероятностью 0,6. В результате залпа из двух пушек в цель попал только один снаряд. Какова вероятность того, что промахнулся первый артиллерист?

«Ответ»: $\frac{1}{3}$.

«Решение». Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй – с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем промаха второго. Поскольку в цель попал только один снаряд, то сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1. Следовательно, первый промахнулся с вероятностью $\frac{1}{3}$.

**№8.** В самостоятельной работе для 10 класса было дано следующее дополнительное задание: «Найдите все значения $x$, для которых выполняется равенство arctg($x^{-1}$) = arcctg$x$». Учитель получил четыре различных решения, которые приведены ниже.

**Оцените каждое из решений (верное оно или нет, какие есть ошибки и недочеты)**.

1) Решение Коли. Найдем тангенсы от каждой части равенства: $tg\left(arctg\left(x^{-1}\right)\right)=\frac{1}{x}$; $tg\left(arcctgx\right)$ = $\frac{1}{ctg\left(arcctgx\right)}$ = $\frac{1}{x}$. Значит, исходное равенство выполняется при всех значениях $x$, кроме нуля.

2) Решение Оли. Найдем котангенсы от каждой части равенства: $ctg\left(arctg\left(x^{-1}\right)\right)$ = $\frac{1}{tg\left(arctg\left(x^{-1}\right)\right)}$ = $x$; $ctg\left(arcctgx\right)$ = $x$. Значит, исходное равенство выполняется при всех значениях $x$.

3) Решение Саши. Так как $tg\left(arctg\left(x^{-1}\right)\right)=\frac{1}{x}$, а $tg\left(arcctgx\right)$ = $tg\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)$ = $\dfrac{tg\frac{\pi}{2}-tg\left(arctgx\right)}{1+tg\frac{\pi}{2}tg\left(arctgx\right)}$ не существует (выражение $tg\frac{\pi}{2}$ не имеет смысла), то равенство не выполняется ни при каких значениях $x$.

4) Решение Маши. Заметим сначала, что $x \neq 0$. Воспользуемся затем определениями обратных тригонометрических функций. Пусть arctg($x^{-1}$) = $\alpha$, тогда tg$\alpha$ = $\frac{1}{x}$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; arcctg$x$ = $\beta$, тогда ctg$\beta$ = $x$, где $0 < \beta < \pi$. Следовательно, ctg$\alpha$ = $x$ = ctg$\beta$. Так как на промежутке (0; $\pi$) функция котангенс убывает, то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента, то есть $\alpha = \beta$. Значит, исходное равенство верно при всех значениях $x$, кроме нуля.

**№9.** В различных школьных учебниках последовательность изучения тем различна. Это, в частности, касается отдельных тем первого раздела стереометрии «Параллельность и перпендикулярность в пространстве». В некоторых учебниках сначала изучается параллельность прямой и плоскости, затем – параллельность плоскостей, после чего – перпендикулярность прямой и плоскости и перпендикулярность плоскостей. В других – сначала перпендикулярность, а затем – параллельность (при этом параллельность плоскостей предшествует параллельности прямой и плоскости).

**Сделайте обзор последовательности изучения этих тем и их приложений, рассмотрев как можно больше школьных учебников (в том числе, для профильного и углубленного изучения), и оцените с методической точки зрения «плюсы и минусы» каждой из этих систем изложения материала.**