VIII Заочный конкурс учителей математики.

I. Решите задачи.

№1. В шахматном фестивале участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл ровно с пятью немцами и двумя французами, каждый немец – с шестью англичанами и четырьмя французами, а каждый француз – с тремя англичанами и с одинаковым числом немцев. Найдите это число.

№2. В треугольнике *ABC* *H* и *M* – точки пересечения высот и медиан соответственно. Найдите угол *BAC*, если биссектриса этого угла перпендикулярна прямой *MH*.

№3. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \ge 4(x - z)$.

№4. Дан пространственный шарнирный четырехугольник *ABCD* (длины его сторон и их порядок – зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое его положение, при котором в тетраэдре *ABCD* двугранные углы при ребрах *AC* и *BD* – прямые.

№5. Найдите все целые значения q, для которых уравнение $x^2 + px + p = q$ имеет целый корень только при одном целом значении p.

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 – №8) могут содержаться математические ошибки (как в «ответах», так и в «решениях»). Укажите все ошибки и, если «решение» не верно, то приведите верное решение.

№6. «Задача». Решите уравнение: arctgx + arctg(–2) = arcctg(–2).

«Ответ»: 0,75.

«Решение». Так как arctgx = arctg2 + arcctg(–2), то x = tg(arctgx) = tg(arctg2 + arcctg(–2)) = $= \frac{tg(arctg2) + tg(arcctg(-2))}{1 - tg(arctg2)\cdot tg(arcctg(-2))} = \frac{2 - 1/2}{1 - 2\cdot(-1/2)} = 0{,}75$

№7. «Задача». Рассматриваются «слова» длины 100, составленные только из букв *A*, *B* и *C*. Каких «слов» больше: тех, в которых каждый из фрагментов *AB* и *AC* встречается четное число раз, или тех, в которых каждый из таких фрагментов встречается нечетное число раз?

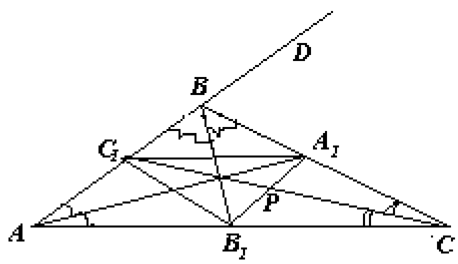
«Ответ»: поровну.

«Решение». Рассмотрим «слово», в котором оба фрагмента встречаются нечетное число раз. Заменим в нем первый из фрагментов на другой (*AB* на *AC*, или наоборот). Получим слово, у которого оба фрагмента встречаются четное число раз. Это соответствие является взаимно-однозначным, поэтому «слов» обоих видов одинаковое количество.

№8. «Задача». В треугольнике *ABC* с углом *B*, равным 120°, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если длины двух его сторон равны 4 и 5.

«Ответ»: 10 или 6.

«Решение». На продолжении стороны *AB* (за точку *B*) отметим точку *D*, тогда $\angle DBC = 60°$, то есть луч *BC* – биссектриса угла DBB_1 (см. рис.). Так как AA_1 – биссектриса угла *BAC*, то A_1 – центр окружности, касающейся BB_1, *BD* и B_1C. Такая окружность является вневписанной для треугольника ABB_1, поэтому, B_1A_1 – биссектриса угла BB_1C. Аналогично, C_1 – центр вневписанной окружности для треугольника CBB_1, поэтому B_1C_1 – биссектриса угла BB_1A. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.



Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный, значит, его площадь $S = \frac{1}{2} B_1A_1\cdot B_1C_1$ Далее возможны два случая:

1) Заданные длины сторон – это длины катетов этого треугольника, тогда его площадь $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$.

2) Гипотенуза этого треугольника равна 5, а один из катетов равен 4. Тогда другой катет равен 3, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

III. Аналитический блок.

№9. Многие планиметрические теоремы имеют аналоги в стереометрии.

1) Приведите несколько примеров:

а) планиметрических теорем и аналогичных им теорем стереометрии.

б) верных планиметрических утверждений и их неверных стереометрических аналогов

в) верных стереометрических утверждений и их неверных планиметрических аналогов.

2) Объясните, каким образом такой материал можно использовать в преподавании курса геометрии.