IX Заочный конкурс учителей математики.

I. Решите задачи.

№1. Три землекопа, работая одновременно, выкопали за час $\frac{7}{10}$ траншеи. Известно, что землекопы работают с разной скоростью, причём каждый из них может выкопать такую траншею меньше чем за сутки, но за целое число часов. За какое время выкопает траншею каждый из них?

№2. У завхоза было трое одинаковых чашечных весов. В одних потерялась часть деталей и теперь они могут показывать что угодно. Любые весы помещаются на одну чашку других весов. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить неисправные весы?

№3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ точка E – середина ребра BB'. Найдите объем тетраэдра $EAD'C$, если $AB = 2$; $AD = 1$; $AA' = \sqrt{3}$.

№4. У Мудрого Учителя Фу есть любимый Ученик Ли. Каждый день Фу вкладывает знания в Ли. Однажды Фу обнаружил, что Ли усваивает на занятии не весь вложенный объем знаний, а только логарифм этого объема (например, если Фу вкладывает в Ли единицу знаний, то Ли не усваивает ничего). Основание логарифма – величина, обратная длине палки (в метрах), с помощью которой Фу вкладывает знания в Ли. Однажды Император издал указ о гуманизации образования, в котором повелел укоротить все палки. До какой наименьшей длины Фу может укоротить палку, чтобы ею можно было вложить в Ли столько знаний, что Ли их усвоит без остатка?

№5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) провели биссектрису BD. Оказалось, что $BC = BD + AD$. Найдите угол BAC.

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 – №8) могут содержаться математические ошибки (как в «ответах», так и в «решениях»). Укажите все ошибки и, если «решение» неверное, то приведите верное решение.

№6. «Задача». Существует ли конечная геометрическая прогрессия с натуральными членами, сумма всех членов которой равна 211?

«Ответ»: нет, не существует.

«Решение». Пусть x – первый член, а q – знаменатель прогрессии, тогда $x(1 + q + q^2 + ... + q^n) = 211$. Так как 211 – простое число, то $x = 1$. Значит, $q(1 + q + ... + q^{n-1}) = 210 = 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7$. Следовательно, в разложении числа q на простые множители могут присутствовать только числа 2, 3, 5 и 7 (либо в первой, либо в нулевой степени.

Пусть $q = 2$, тогда $1 + 2 + ... + 2^{n-1} = 105 \Leftrightarrow 2^n - 1 = 105 \Leftrightarrow 2^n = 106$, что невозможно.

Пусть $q = 3$, тогда $1 + 3 + ... + 3^{n-1} = 70$. Так как $3^4 = 81 > 70$, то достаточно проверить $n = 2$; 3; 4. Во всех случаях равенство неверно.

Пусть $q = 5$, тогда $1 + 5 + ... + 5^{n-1} = 42$. Так как $5^3 = 125 > 42$, то достаточно проверить $n = 2$ и $n = 3$. В обоих случаях равенство неверно.

Пусть $q \ge 6$, тогда $1 + q + ... + q^{n-1} \le 35$, но $q^2 \ge 36$, поэтому ни при каких натуральных n, больших двух, неравенство $1 + q + ... + q^{n-1} \le 35$ выполняться не может.

№7. «Задача». Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC – точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

«Решение». Отметим на AB точку M, а на BC – точку N так, чтобы $AM = CN = \frac{1}{4}AB$. Докажем, что отрезок MN – искомое ГМТ.

Ясно, что L и K лежат по разные стороны от прямой MN и $KM = LN$. Без ограничения общности считаем, что K лежит на отрезке BM. Проведем через K прямую параллельно BN до пересечения с MN в некоторой точке D. Стороны треугольников MKD и ABC

параллельны, поэтому MKD – равнобедренный, $MK = KD$. Отрезки KD и NL равны и параллельны, значит, $KNLD$ – параллелограмм, и середина KL лежит на DN.

Обратно, пусть E – точка на MN, и, скажем, $EN < EM$. Отложим на EM отрезок $ED = EN$ и проведем через D прямую параллельно BN до пересечения с BM в точке K. Тогда, отложив на луче NC отрезок $NL = DK$, получим нужный нам отрезок KL с серединой E.

№8. «Задача». Вася и Петя закрашивают по очереди клетки на доске размером 4×4 так, чтобы не образовывался квадрат 2×2 из закрашенных клеток. Тот, кто не сможет сделать очередной ход, проигрывает. Начинает Петя. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

«Ответ»: Вася.

«Решение». Как бы не играли Вася и Петя, они обязательно сделают в сумме 12 ходов. Тринадцатый ход должен будет сделать Петя, поэтому он проиграет.

III. Аналитический блок.

№9. На уроке была предложена задача: «У Вани есть 6 учебников по разным предметам, один из которых учебник алгебры. Он наугад кладет в портфель два учебника. Какова вероятность того, что один из них окажется учебником алгебры?

Школьник предложил такое решение: «Если Ваня положит в портфель только один учебник, то вероятность того, что это будет учебник алгебры, равна $\frac{1}{6}$. А так как он кладет два учебника, то вероятность удваивается, следовательно, она равна $\frac{1}{3}$».

Разгорелся спор. Одни считали предложенное решение, в целом, верным, хотя и недостаточно обоснованным. Другие утверждали, что решение ошибочно, хотя и приводит к верному ответу.

1) Приведите разумные аргументы за обе стороны спорящих. На чьей Вы стороне и почему?

2) Приведите еще 1 – 2 примера задач по комбинаторике или теории вероятностей, в которых верный ответ получается путем неверных или неполных рассуждений. Объясните, из каких соображений можно либо опровергнуть каждое из приведенных Вами «решений», либо довести его до верного.