X Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Какую часть сотрудников фирмы надо уволить, чтобы при уменьшении фонда заработной платы на 20% повысить среднюю зарплату оставшихся сотрудников на 20%?

№2. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком и к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли оказаться так, что на каждом построенном перпендикуляре лежат ровно две отмеченные точки?

№3. Известно, что при любых целых значениях x выражение $ax^3 + bx^2 + cx$ принимает целые значения. Докажите, что $6a$ – целое число.

№4. В шахматном турнире участвуют 2014 игроков. В каждом туре они произвольным образом разбиваются на пары так, чтобы шахматисты в каждой паре ранее в этом турнире между собой не играли. Турнир заканчивается, когда такое разбиение провести невозможно. Какое наибольшее количество туров можно гарантированно провести в таком турнире?

№5. В равнобедренном треугольнике ABC проведена окружность с центром C, касающаяся основания AB, которая пересекает боковые стороны в точках A' и B'. В образовавшейся трапеции $AA'B'B$ проведен отрезок DE, параллельный ее основаниям и разбивающий ее на две подобные трапеции. Сравните длину DE и длину дуги окружности, лежащей внутри трапеции.

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 – №8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

№6. «Задача». При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

«Ответ»: при a = 0,25.

«Решение». Подставив значение $x^2 - 2x$ из первого уравнения во второе, получим: $y^2 + a^2 - 2ay + y = 0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно y, тогда $y^2 + y(1-2a) + a^2 = 0$. Для того, чтобы решение было единственным, потребуем равенства нулю дискриминанта: $D = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 = 1 - 4a = 0$, откуда a = 0,25.

№7. «Задача». Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

«Ответ»: $4C_{51}^{9}$.

«Решение». Поскольку требуется туз, то сначала выберем его и это можно сделать четырьмя способами. Затем достаточно выбрать произвольные 9 карт из 51. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{51}^{9}. Так как оба выбора происходят независимо, то искомое количество способов равно $4C_{51}^{9}$.

№8. «Задача». Даны три окружности α, β и γ. Никакие две из этих окружностей не лежат в одной плоскости, но каждые две из них имеют ровно две общие точки. Докажите, что все три окружности принадлежат одной сфере.

«Решение». Пусть окружности α и β пересекаются в точках P и Q. Докажем, что существует сфера, на которой лежат обе окружности. Действительно, каждая окружность однозначно задается тремя точками, то есть окружность α задается точками A, P и Q, а окружность β – точками B, P и Q. Значит, пара окружностей задается четырьмя точками A, B, P и Q, а через любые 4 точки пространства можно провести сферу. Третья окружность γ имеет с этой сферой 4 общие точки (две – с α, и две – с β), поэтому γ принадлежит сфере.

III. Аналитический блок.

№9. При изучении темы «Арифметический квадратный корень» рассматриваются два тождества: 1) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$; 2) $\sqrt{x^2} = |x|$.

1) Запишите все известные Вам аналогичные пары тождеств из других разделов школьного курса.

2) Что общего у всех пар тождеств такого вида?

3) Чем принципиально различаются два тождества в каждой паре и в связи с чем возникает это различие?

4) Какие общие свойства функций используются при доказательстве тождества 2) и ему аналогичных тождеств в других парах?