XI Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Пони и ослик бегали с постоянными скоростями по кругу длиной 100 метров. Пони каждые 2 минуты обгонял ослика. Когда ослик вдвое увеличил скорость, он сам стал каждые 2 минуты обгонять пони. С какими скоростями бегали пони и ослик изначально?

№2. На координатной плоскости *XOY* покрашены все прямые вида $y = ax + a^2$. Нарисуйте покрашенную область. Ответ обоснуйте.

№3. Докажите, что в равногранном тетраэдре вершина проектируется в точку, симметричную ортоцентру основания относительно центра его описанной окружности.

№4. В футбольном турнире команда *А* заняла первое место, набрав больше всех очков, а команда *Б* – последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то, наоборот, команда *Б* стала бы первой, а команда *А* – последней. Какое наименьшее количество команд могло играть в турнире? (*Каждая команда сыграла с каждой один раз*.)

№5. Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность, *AN* – ее диаметр. На сторонах *AC* и *AB* отмечены точки *D* и *E* соответственно так, что $\angle BNE = \angle CND$. Прямые *DE* и *BC* пересекаются в точке *F*, *K* – середина отрезка *DE*. Окружность, описанная около треугольника *ADE*, вторично пересекает данную окружность в точке *X*. Докажите, что угол *KXF* – прямой.

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 и №7) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

№6. «Задача». Решите уравнение: $(1+x+...+x^9)(1+x+...+x^{11}) = (1+x+...+x^{10})^2$.

«Ответ»: 0.

«Решение». По формуле для вычисления суммы первых *n* членов геометрической прогрессии получим: $\frac{x^{10}-1}{x-1}\cdot\frac{x^{12}-1}{x-1} = \frac{(x^{11}-1)^2}{(x-1)^2}$. Избавившись от знаменателя и раскрыв скобки, получим, что $x^{22} - x^{12} - x^{10} + 1 = x^{22} - 2x^{11} = 1$, то есть $x^{10}(x-1)^2 = 0$. Корни этого уравнения: $x = 0$ или $x = 1$, но второй корень – посторонний, так как при $x = 1$ знаменатели дробей обращаются в ноль.

№7. «Задача». Натуральные числа *a* и *b* удовлетворяют соотношению $2a^2 + a = 3b^2 - b$. Докажите, что $a + b$ – точный квадрат.

«Решение». Перенося $2b^2 - b$ в левую часть равенства, получим, что $2(a^2 - b^2) + a + b = b^2$, то есть $(a + b)(2a - 2b + 1) = b^2$. Осталось заметить, что числа $a + b$ и $2a - 2b + 1$ взаимно просты, следовательно, каждое из них – точный квадрат.

№8. «Определение». Правильным многоугольником называется простая замкнутая ломаная, у которой равны длины всех звеньев и равны все углы между соседними звеньями.

Корректно ли это определение для правильного: а) четырехугольника; б) шестиугольника; в) пятиугольника? Обоснуйте.

III. Аналитический блок.

№9. Некоторые школьники допускают ошибки, используя в процессе решения каких-то задач «тождества» типа $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$. Это может и не повлиять на результат, так как существуют значения переменных, для которых подобные равенства верны. Например, данное равенство выполняется при $a = 3$, $b = 1{,}5$.

1) Найдите множество всех пар (*a*; *b*), для которых верно это равенство.

2) Приведите еще несколько примеров похожих ошибок из других разделов школьной программы (*желательно, чтобы множества значений переменных или классы объектов, для которых приведенные Вами соотношения окажутся верными, были достаточно широкими и отличными от тривиальных*).
3) Для каждого примера найдите множество значений переменных или класс объектов, для которых приведенные Вами соотношения верны.