XIII Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Рабочие изготовили детали двух видов: винтики и шпунтики. Каждый сделал 12 деталей, причем Вася – восьмую часть всех винтиков и 3 шпунтика – больше шпунтиков, чем любой другой рабочий. Сколько было рабочих?

№2. Дан куб с ребром 3 см. Хулиган Вася выкрасил некоторые грани этого куба в красный цвет, а затем распилил куб на маленькие кубики с ребром 1 см. Могло ли при этом получиться ровно 7 кубиков, у которых не окрашена ни одна из граней?

№3. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ найдутся такие нечетные числа x и y, что $7x^2 + y^2 = 2^n$.

№4. Докажите, что $(1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) - xyzt \leq \frac{5}{16}$, если сумма положительных чисел x, y, z и t равна 1.

№5. На сторонах прямоугольного треугольника вне его построены квадраты. Эту известную с давних времён картинку иногда называют «пифагоровы штаны». Постройте (циркулем и линейкой) ещё один квадрат так, чтобы он делил площадь каждого из трех квадратов «пифагоровых штанов» пополам.

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№№6 – 8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

№6. «Задача». В коробке было 16 конфет четырёх видов – по четыре конфеты каждого вида. Их раздали восьмерым детям – по две конфеты каждому. Докажите, что какие-то двое детей получили либо четыре одинаковые конфеты, либо четыре попарно различные.

«Решение». Предположим, что это не так. Обозначим виды конфет цифрами 1, 2, 3, 4. Каждому ребёнку могли достаться либо две одинаковые конфеты, либо две различные.

1) Две одинаковые конфеты. Если для какого-нибудь вида конфет таких детей двое, то им достались четыре одинаковые конфеты. Значит, всего таких детей не более четырёх.

2) Две различные конфеты. Разобьём все возможные пары различных конфет на три пары, дополняющие друг друга до полного набора: {1-2, 3-4}, {1-3, 2-4}, {1-4, 2-3}. Если каким-то двум детям досталось по две конфеты, принадлежащие одной из таких пар, то они получили четыре попарно различные конфеты. Следовательно, таких детей не более трёх.

Таким образом, всего могло быть не более семи детей, однако по условию их восемь. Противоречие.

№7. «Задача». Найдите точки экстремума непрерывной функции $f(x)$, если $f''(x) = 2$ при всех $x < 0$ и $f'(x) = 1$ при всех $x \geq 0$.

«Ответ»: $x = -0{,}5$.

«Решение». Дважды интегрируя $f''(x)$ при $x < 0$, получим, что при таких x функция имеет вид: $f(x) = x^2 + ax + b$. Интегрируя $f'(x) = 1$ при $x \geq 0$, получим, что при таких x функция имеет вид: $f(x) = x + c$. Так как функция непрерывна, то $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 + ax + b\right) = f(0) = c$, следовательно, $b = c$. Кроме того, $f'(0) = 1$, значит, $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 + ax + b\right)' = \lim\limits_{x \to 0}(2x + a) = 1$. Следовательно, $a = 1$. Таким образом, функция имеет вид: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + c, x < 0 \\ x + c, x \geq 0 \end{cases}$

У такой функции только одна точка экстремума: $x = -0{,}5$.

№8. «Задача». В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противолежащие стороны попарно параллельны и $AC = BD = CE = DF = EA = FB$. Докажите, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

«Решение». Заметим, что четырёхугольник *ABDE* – равнобокая трапеция, так как по условию параллельны стороны *AB* и *DE*, равны стороны *BD* и *AE*. Равнобокая трапеция – вписанный четырёхугольник, поэтому точки четвёрки (*A*, *B*, *D*, *E*) лежат на одной окружности. Аналогичный вывод можно сделать для четвёрок (*B*, *C*, *E*, *F*) и (*C*, *D*, *F*, *A*). Диагональ *BE* – общая хорда окружностей для четвёрок (*A*, *B*, *D*, *E*) и (*B*, *C*, *E*, *F*). Аналогично, диагональ *CF* – общая хорда окружностей второй и третьей четвёрок, диагональ *AE* – общая хорда окружностей третьей и первой четвёрок. По лемме о трёх хордах (частный случай теоремы о радикальном центре трёх окружностей) *AD*, *BE* и *CF* пересекаются в одной точке.

III. Педагогический блок.

№9. Молодой учитель часто предлагает классу интересные задачи, посильные лишь немногим ученикам. К нему пришли обеспокоенные родители «средних» учеников. Их огорчает, что их дети на уроке попусту теряют время, потому что сами решить такие задачи не могут. В результате они хуже усваивают программный материал. Домашнее задание выполнить целиком многие также не могут, а последнее время уже и не пытаются. Дети теряют веру в свои силы и получают психологическую травму.

Назовите несколько возможных методических ошибок учителя и дайте ему как можно более конкретные советы о форме подачи трудных задач. Что ему, возможно, имеет смысл изменить в своей работе? А что лучше не менять, а спокойно объяснить родителям? Как построить работу так, чтобы и «волки были почти сыты, и овцы почти целы»?