XIV Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Поставьте три точки так, чтобы равенство (I + I)·(I + I) = 2I стало верным.

№2. Сравните, не используя калькулятор, числа: $\dfrac{\sin^2 1^\circ + 0{,}5}{2}$ и $\sin^2 23^\circ \cdot \cos^2 22^\circ$.

№3. Отряд нефтяников прилетел на вахтовую работу. Вахта продолжалась 35 дней, причем ежедневно на работу выходила бригада из 27 человек. Оказалось, что в любые три дня в бригадах был ровно один общий рабочий. Верно ли, что есть рабочий, выходивший на работу каждый день?

№4. Уравнение $x^3 + px^2 + q = 0$ имеет три целых корня, причём модули двух из них являются простыми числами. Найдите корни этого уравнения.

№5. В тетраэдре равны суммы двугранных углов при противолежащих ребрах. Докажите, что существует сфера, которая касается всех его ребер.

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 и №7) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

№6. «Задача» Среди трёх девушек одна – самая умная, одна – самая красивая и одна – самая высокая. Самая умная всегда говорит правду, самая красивая всегда врёт, а самая высокая – когда как. Однажды Света и Маша сказали: «Обе мои подруги умнее меня», а Аня сказала: «Маша умнее …», а кого именно, её самой или Светы, никто не услышал. Кто есть кто?

«Ответ». Аня – самая умная, Света – самая высокая, а Маша – самая красивая.

«Решение». Действительно, Маша умнее Светы, поэтому Света сказала правду, а Маша солгала. Но тогда самой умной не могут оказаться ни Света, ни Маша, значит, самая умная – это Аня. Следовательно, Света может быть только самой высокой, а Маша – только самой красивой.

№7. Пусть f и f' дифференцируемы в некоторой окрестности точки а. Докажите, что для любого x из этой окрестности $f(x) = f(a) + f'(a)x + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$, где $c \in (a;x)$.

«Решение». Применим теорему Лагранжа для производной: $f'(x) - f'(a) = f''(c)(x-a)$, где $c \in (a;x)$ Отсюда: $f'(x) = f'(a) + f''(c)(x-a)$ Первообразная левой части равна $f(x)$ Первообразная правой части: $f'(a)x + f''(c)\dfrac{(x-a)^2}{2}$. Так как. все первообразные отличаются на константу, то $f(x) = f'(a)x + f''(c)\dfrac{(x-a)^2}{2} + K$. Для того, чтобы найти константу положим $x = a$, тогда $f(a) = f'(a)\cdot a + K$, откуда $K = f(a) - f'(a)\cdot a$. Подставив значение *K*, получим: $f(x) = f'(a)x + f''(c)\dfrac{(x-a)^2}{2} + f(a) - f'(a)\cdot a$, то есть $f(x) = f(a) + f'(a)x + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$, что и требовалось.

№8. Приведите как можно больше различных способов решения задачи:

Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника *ABC*, проведенные в точках *B* и *C*, пересекаются на прямой, симметричной медиане *AM* этого треугольника относительно биссектрисы угла *BAC*.

III. Аналитический блок.

№9. В 5 классе, для того, чтобы найти, например, 2/5 от числа 30, делают так: 30 : 5 × 2 = 12. А для того, чтобы найти число, 2/5 от которого составляет 30, делают так: 30 : 2 × 5 = 75. В 6 классе детей приходится переучивать: для решения этих же задач теперь полагается умножать (делить) 30 на 2/5. У школьников возникает психологическое сопротивление.

Ответьте на следующие вопросы:

1) Стоит ли закреплять навык счёта типа «30 : 5 × 2», если потом всё равно переучивать?

2) Может, и не надо переучивать: просто показать, что умножение на дробь приводит к тому же результату, а на практике считать по-прежнему? Если надо, то приведите примеры задач, которые убедят шестиклассника, что новый способ – это не каприз учителя, а полезное умение. Если не надо, то объясните, почему.

3) Приведите несколько типов задач из школьного курса 7 – 11 классов , которые сначала имеет смысл научить решать одним методом, а потом объявить его «устаревшим» и обучить более удобному и / или универсальному методу.