Решения.

I. *Каждая задача оценивалась в 10 баллов.*

1. (*И.В. Раскина и Е.Б. Гладкова по мотивам И.Ф. Акулича*) Ноздрев ловким движением спрятал шашку Чичикова за обшлаг рукава. В результате черных шашек на доске оказалось в 4 раза больше, чем было белых шашек за несколько ходов до этого. Сколько всего шашек осталось на доске после похищения, если непосредственно перед ним черных шашек было в 5 раз больше, чем белых?

Ответ: 5.

Решение. Пусть белых шашек непосредственно перед похищением было x, а за несколько ходов до похищения — y. Тогда черных шашек непосредственно перед похищением было $5x$, а после него — $4y$. На доске не может находиться больше 12 черных шашек, поэтому x может принимать только значения 1 или 2.

Предположим, что Ноздрев спрятал белую шашку, тогда $5x = 4y$. В этом случае, при указанных значениях x значения y не являются целыми. Следовательно, похищенная шашка была черной, то есть $5x - 1 = 4y$. Осталось заметить, что $x = y = 1$ — решение полученного уравнения, а при $x = 2$ значение y не является целым.

Таким образом, после кражи на доске осталась одна белая шашка и четыре черных, а всего осталось пять шашек.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 баллов.

Рассмотрено оба случая, но не описано в каких ситуациях они возможны — 8 – 9 баллов.

Ответ получен, но вариант «10 черных шашек» отброшен без обоснования — 5 баллов.

Ответ получен исходя из того, что на доске не более 24 шашек — 5 баллов.

Рассмотрен только один случай — 2 балла.

Задача решалась, исходя из предположения, что за несколько ходов до похищения и непосредственно перед ним было одинаковое количество белых шашек — 1 балл.

2. (*Пятая Соросовская олимпиада школьников.*) В скачках участвуют три лошади. На одну из них ставки принимают в отношении 1: 4 (то есть, если эта лошадь приходит первой, то поставленные на нее деньги возвращают и ещё выдают 4 раза по столько), на другую 1: 3, на третью 1: 1. (*Если лошадь не приходит первой, то деньги, поставленные на нее, не возвращаются*). Можно ли так сделать ставки, чтобы выиграть при любом исходе забега?

Ответ: да, можно.

Решение. Приведем два из возможных способов рассуждений.

Первый способ. При победе первой лошади ставку возвращают в пятерном размере, поэтому на нее надо поставить более $\frac{1}{5}$ всех денег. Аналогично, на вторую лошадь надо поставить более $\frac{1}{4}$ денег, а на третью — более $\frac{1}{2}$. Это возможно, поскольку $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{19}{20} < 1$.

Например, имея 100 рублей, на первую лошадь надо поставить более 20 рублей, на вторую — более 25, а на третью — более 50 рублей. Тогда, поставив на первую лошадь 21 рубль, на вторую — 26 рублей, и на третью — 51 рубль, мы останемся в выигрыше.

Отметим, что приведенный способ рассуждения позволяет при желании даже получить одинаковый выигрыш при любом исходе забега. Действительно, можно сделать, например, такие ставки: 4, 5 *и* 10 *рублей соответственно. Тогда, затратив* 19 *рублей, при любом исходе забега мы получим* 20 *рублей.*

Второй способ. Пусть ставка на первую, вторую и третью лошадь сделана в отношении $x : y : 1$ ($x > 0$, $y > 0$). Тогда для выигрыша при любом исходе забега необходимо выполнение нескольких условий:

1) при победе первой лошади суммарный выигрыш $5x$ должен быть больше, чем изначальная ставка $x + y + 1$;

2) при победе второй лошади суммарный выигрыш $4y$ должен быть больше, чем $x + y + 1$;

3) при победе третьей лошади суммарный выигрыш 2 должен быть больше, чем $x + y + 1$.

Таким образом, для положительных значений x и y должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} 5x > x+y+1, \\ 4y > x+y+1, \\ 2 > x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y < 4x-1 \\ y > \dfrac{x+1}{3} \\ y < -x+1 \end{cases}$$

Удобно найти решение полученной системы графически (см. рис. 2). Решением будут координаты всех внутренних точек треугольника, образовавшегося при попарном пересечении построенных прямых (заметим, что этот треугольник лежит в первой четверти, поэтому, условия $x > 0$ и $y > 0$ выполняются).

Приведем один из возможных конкретных примеров: $x = \frac{5}{11}$; $y = \frac{1}{2}$, тогда ставки можно сделать в отношении $10 : 11 : 22$.

Отметим, что при этом способе рассуждений, получив систему неравенств, можно подобрать пример и без использования графических соображений.

Отдельно заметим, что подобные задачи относятся к так называемой «математике выборов» и даже имеют научное название — «диверсификация рисков».

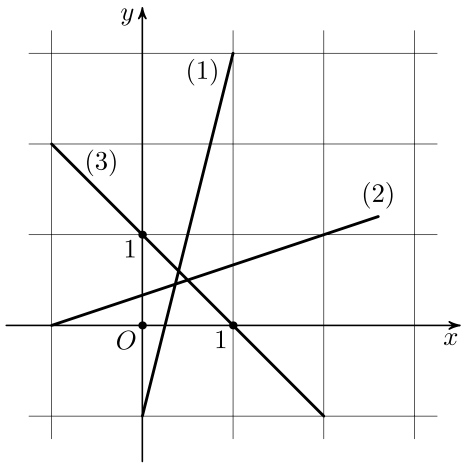


Рис. 2

Критерии проверки.

Приведен верный пример и объяснено, почему такая ставка гарантирует выигрыш — 10 баллов.

Верно составлена, но неверно решена система неравенств — 1 балл.

3. (*Заочная олимпиада МФТИ*) Верно ли, что если все грани тетраэдра остроугольные треугольники, то и все его двугранные углы — острые?

Ответ: нет, не верно.

Решение. Приведем несколько возможных способов рассуждений.

Первый способ. Приведем пример тетраэдра, все грани которого остроугольные треугольники, а один из двугранных углов — прямой. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 3а). Пусть точка M — середина ребра A_1B_1, а точка K — середина ребра CD. Тогда тетраэдр $ABMK$ обладает указанными свойствами.

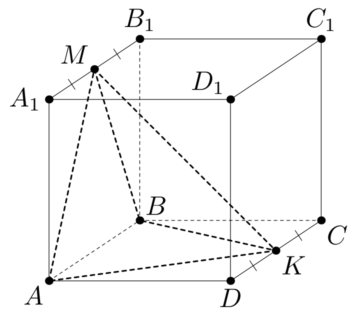


Рис. 3а

Действительно, двугранный угол с ребром AB — прямой. Грани тетраэдра являются попарно равными равнобедренными треугольниками. Для того, чтобы доказать, что они являются остроугольными треугольниками, достаточно доказать, что углы при их основаниях больше 45°. Для граней ABK и ABM это очевидно. Докажем это для граней AMK и BMK. Пусть ребро куба равно a, тогда $AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $MK = a\sqrt{2}$. $\cos\angle AMK = \frac{MK}{2AK} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\angle AMK > 45^\circ$.

Отметим, что можно получить тетраэдр и с тупым двугранным углом, удовлетворяющий условию. Рассмотрим, например, два равнобедренных треугольника ABC и ABD с общим основанием (см. рис. 3б). Пусть длины высот CE и DE, проведенных к общему основанию AB, равны h; $CA = CB = DA = DB = 1,4h$; $CD = 1,5h$. Тогда в тетраэдре $ABCD$ двугранный угол при ребре AB — тупой, так как $CE^2 + DE^2 < CD^2$. Все грани этого тетраэдра — остроугольные треугольники, что несложно проверить, посчитав косинусы плоских углов, например, при вершине A. Заметим, что такой тетраэдр можно было получить по аналогии с приведенным выше, рассматривая вместо куба наклонный параллелепипед.

Второй способ. Воспользуемся теоремой косинусов для трехгранных углов:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi,$$

где α, β и γ — плоские углы трехгранного угла, а φ — величина двугранного угла, противолежащего γ. Тогда $\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. Угол φ не будет острым, если $\cos\varphi \leqslant 0$, то есть $\cos\gamma \leqslant \cos\alpha\cos\beta$.

Это условие выполняется, например, при $\gamma = 60°$, $\alpha = \beta = 45°$. (Заметим, что трехгранный угол с такими плоскими углами существует, так как $\alpha + \beta > \gamma$).

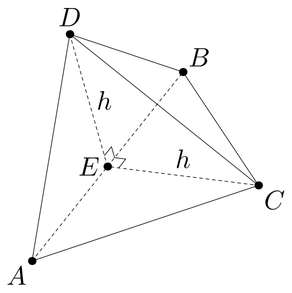


Рис. 3б

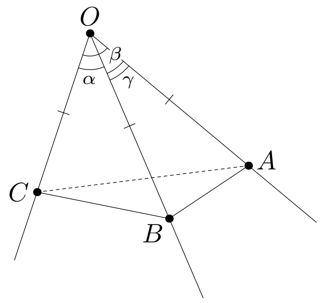


Рис. 3в

Пересечем теперь такой трехгранный угол с вершиной O плоскостью ABC, где точки A, B и C лежат на его ребрах и $OA = OB = OC = 1$ (см. рис. 3б). Получим тетраэдр $OABC$, в котором грани AOB, BOC и COA заведомо являются остроугольными треугольниками. Грань ABC также является остроугольным треугольником, поскольку $AB = 1$, $CA = CB = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, значит, $CA^2 + CB^2 = 4 - 2\sqrt{2} > 1 = AB^2$. Таким образом полученный тетраэдр с прямым двугранным углом OA удовлетворяет условию задачи.

Аналогичным образом можно было получить тетраэдр и с тупым двугранным углом при одном из ребер и удовлетворяющий условию задачи.

Критерии проверки.

Приведен верный пример и полное обоснованное того, что он удовлетворяет условию — 10 *баллов.*
Приведен верный пример, но в обоснованиях есть неточности — 8 *баллов.*
Верный пример описан, но не обоснован — 3 *балла.*

4. (*Вступительный экзамен в МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет почвоведения*) В треугольнике ABC: $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$, AD — биссектриса. Окружность проходит через точку A, касается стороны BC в точке D и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Найдите длину EF.

Ответ: $EF = 6$.

Решение. Докажем, что $EF||BC$ (см. рис. 4). Пусть $\angle DAB = \angle DAC = \alpha$. Действительно, проведем отрезки DE и DF, тогда $\angle DFE = \angle DAE = \alpha$ (вписанные углы) и $\angle CDF = \angle DAF = \alpha$ (CDF — угол между касательной и хордой).

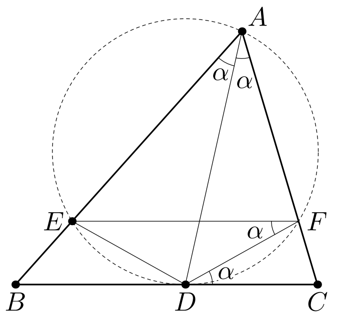


Рис. 4

По свойству биссектрисы угла треугольника $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{7}{9}$, кроме того, $CD + DB = 7$. Решая эту систему уравнений, получим, что $CD = \dfrac{7}{2}$.

По теореме о касательной и секущей: $CD^2 = CF \cdot CA$, тогда $CF = \dfrac{CD^2}{CA} = \dfrac{7}{4}$. Значит, $AF = AC - CF = \dfrac{21}{4}$. Так как $EF||BC$, то $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{3}{4}$, то есть $EF = \dfrac{3}{4}BC = 6$.

Возможны и другие способы решения, в частности, использующие теорему косинусов, теорему Птолемея и пр.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 *баллов.*
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка в заключительной части, которая привела к неверному, но «допустимому» ответу — 7 *баллов.*
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка, которая привела к неверному и «нереальному» ответу — 5 *баллов.*
Верно вычислены только отрезки, образовавшиеся на сторонах треугольника — *от* 1 *до* 3 *баллов.*

5. (*Российский Фестиваль юных математиков*) Существует ли такая функция $f(x)$, что $f(f(x)) = \sin x$?

Ответ: да, существует.

Решение. Поскольку функция $y = \sin x$ является периодической, то достаточно построить искомую функцию $f(x)$ на каком-нибудь промежутке длиной 2π. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{если} \quad -\pi < x < 0, \\ -x, & \text{если} \quad 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \quad \text{или} \quad x = \pi, \end{cases}$$

определенную на промежутке $(-\pi; \pi]$, и покажем, что она удовлетворяет условию задачи. Действительно:

1) если $x \in (-\pi; 0)$, то $f(x) = -\sin x = l \in (0; \pi)$ и $f(f(x)) = f(l) = -l = -(-\sin x) = \sin x$;

2) если $x \in (0; \pi)$, то $f(x) = -x = t \in (-\pi; 0)$ и $f(f(x)) = f(t) = -\sin t = -\sin(-x) = \sin x$;

3) если $x = 0$, то $f(0) = 0$ и $f(f(0)) = f(0) = 0 = \sin 0$; если $x = \pi$, то $f(\pi) = 0$ и $f(f(\pi)) = f(0) = 0 = \sin \pi$.

Некоторые участники приводили пример функции, определенной только в одной точке. Отметим, что задача сформулирована традиционно для подобного класса задач: если не указана область определения искомой функции, то считается, что она должна быть определена на R (так как функция $\sin x$, стоящая в правой части равенства, определена на R).

II. Методический блок

Каждое задание оценивалось в 10 баллов.

В предложенных «задачах» (задания №6 — №8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях, так и в «ответах», «решениях» или «доказательствах»). Если некорректно условие, то объясните, почему это так, и найдите ошибки в «решении» («доказательстве»). Если неверно только «решение» («доказательство»), то укажите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

6. (*Предложил Д.Э. Шноль*) **«Задача».** При каких значениях a сумма квадратов трех действительных корней многочлена $P(x) = x^3 + ax^2 - x + 2$ равна 6?

«Ответ»: при $a = \pm 2$.

«Решение». Если многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 - x + 2$ имеет три действительных корня x_1, x_2 и x_3, то его можно представить в следующем виде: $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Раскрывая скобки, получим, что $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$ и $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1$.

Учитывая условие $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$, получим: $a^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 6 - 2 = 4$. Таким образом, $a = \pm 2$.

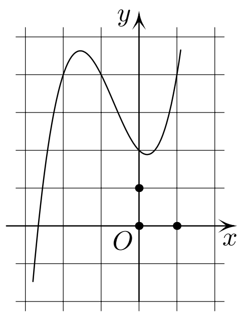


Рис. 6а

Комментарий. ***Приведенный «ответ» неверен, а «решение» не доведено до конца.*** Действительно, все приведенные в «решении» выкладки сделаны, исходя из предположения, что многочлен $P(x)$ имеет три корня. (*Попутно отметим, что в этом случае можно не раскладывать многочлен на множители, а использовать теорему Виета.*) Получив два возможных значения a, необходимо далее проверить, сколько действительных корней имеет многочлен при каждом из этих значений.

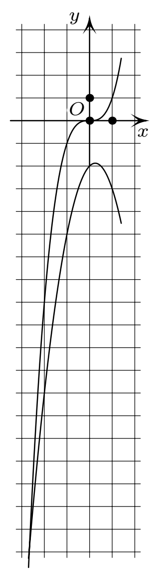


Рис. 6б

1) $a = -2$. Тогда многочлен имеет вид: $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ и легко раскладывается на множители: $P(x) = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$. Таким образом, в этом случае многочлен действительно имеет три корня, сумма квадратов которых равна 6.

2) $a = 2$. Тогда многочлен имеет вид: $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$. Определим количество его корней. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Можно провести исследование получившийся функции $P(x)$ на монотонность и экстремумы. Так как $P'(x) = 3x^2 + 4x - 1$, то критическими точками функции являются $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{7}}{3}$ и $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{3}$.

Так как $P(x)$ — многочлен третьей степени с положительным первым коэффициентом, то на каждом из промежутков $(-\infty; x_1]$ и $[x_2; +\infty)$ функция возрастает, а на $[x_1; x_2]$ — убывает. На каждом из этих промежутков не может быть более одного корня. Поскольку $P(x_1) > P(x_2) > 0$, то единственный корень многочлена $P(x)$ располагается на промежутке $(-\infty; x_1]$ (см. рис. 6а).

Таким образом, верный ответ: $a = -2$.

Второй способ. Запишем получившийся многочлен так: $P(x) = x(x^2-1)+2(x^2+1)$. Предположим, что он имеет три действительных корня: x_1, x_2 и x_3, и докажем, что среди них нет положительных. Действительно, по теореме Виета, $x_1x_2x_3 = -2$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_3 = -1$. При этом, если $x \in [0; 1]$, то $x(x^2-1) < 2(x^2+1)$, значит, $P(x) > 0$; если $x \in (1; +\infty)$, то $x(x^2-1) > 0$ и $2(x^2+1) > 0$, то есть также $P(x) > 0$. Но, если все три корня многочлена отрицательны, то $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_3 > 0$ — противоречие!

Таким образом, $a = 2$ решением задачи не является.

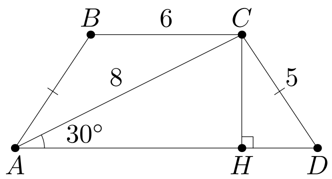
Отметим, что количество корней многочлена $P(x)$ можно определить графически (хотя это и не является строгим обоснованием). Уравнение $x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ равносильно уравнению $x^3 = -2x^2+x-2$. Построив графики функций $y = x^3$ и $y = -2x^2+x-2$ в одной координатной плоскости (см. рис. 6б), можно убедиться, что они имеют одну точку пересечения.

Критерии проверки.

Верно указана ошибка в «решении» и полностью проверены оба случая — 10 баллов.
Верно указана ошибка в «решении», проверены оба случая, но в случае $a = 2$ доказательство не строгое — 7 баллов.
Верно указана ошибка в «решении», но проверен только первый случай ($a = -2$) — 5 баллов.
Верно указана только ошибка в «решении» — 2 балла.

7. (*Предложил Д.Э. Шноль*) **«Задача».** В равнобокой трапеции $ABCD$ (AD — большее основание): $AB = DC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle CAD = 30°$. Найдите площадь трапеции.

«Ответ»: 36 см^2.



«Решение». Проведем высоту CH (см. рисунок). Так как $\angle CAD = 30°$, то $CH = \frac{1}{2}AC = 4$ (см). Треугольник CDH — египетский, значит, $DH = 3$ см. Так как трапеция равнобокая, то $AD = BC+2DH = 12$ (см).

Следовательно, площадь трапеции: $S = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot CH = 36$ (см^2).

Комментарий. *Условие задачи некорректно*: *такой трапеции не существует.* Это можно показать различными способами. Приведем два из них.

Первый способ. В тексте «решения», используя данные «задачи», получено, что $DH = 3$ см, значит, $AH = BC + DH = 9$ см, то есть в прямоугольном треугольнике ACH гипотенуза AC меньше катета AH, что невозможно.

Второй способ. Исключим из условия длину основания BC и найдем ее, исходя из других данных задачи. Первые несколько шагов совпадут с приведенным выше «решением»: Проведем высоту CH. Так как $\angle CAD = 30°$, то $CH = \frac{1}{2}AC = 4$ (см). Треугольник CDH — египетский, значит, $DH = 3$ см. Далее: $AH = AC\cos 30° = 4\sqrt{3}$ (см). Так как трапеция равнобокая, то $BC = AH - DH = 4\sqrt{3} - 3$ (см). Это противоречит условию «задачи», где сказано, что $BC = 6$ см.

Третий способ. Рассмотрим треугольник ABC: $\angle ACB = \angle CAD = 30°$. По теореме косинусов: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle ACB = 100 - 48\sqrt{3}$. Это противоречит условию «задачи», из которого следует, что $AB^2 = 25$.

Следовательно, избыточность условия «задачи» привела к ошибке.

Критерии проверки.

Верно указана и любым способом обоснована избыточность в условии «задачи» — 10 баллов.

8. (*Предложил А.В. Хачатурян*) **«Задача».** В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.

«Доказательство». Поместим всех депутатов в зал. Выберем одного депутата и отправим его в палату A. Затем, выберем в зале такого депутата, у которого нет врагов в A (если такой есть), и также отправим его в A. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока в зале будут оставаться такие депутаты. Когда они закончатся, выберем в зале такого депутата, который имеет в палате A ровно одного врага, и отправим его в A. Проделаем так несколько раз, пока и такие депутаты не закончатся. Тогда возьмём в зале таких депутатов, у которых три врага в палате A, и всех их отведём в палату B. Они не враждуют между собой, так что всё будет корректно. В зале останутся депутаты, у которых ровно два врага в палате A, но тогда у них не более одного врага среди депутатов из палаты B и тех депутатов, кто пока остался в зале, стало быть, всех их можно отправить в B. Задача решена.

Комментарий. ***Предложенное «доказательство» неверно.*** В самом деле, рассмотрим момент, когда мы впервые отправляем в палату A такого депутата (допустим, депутата D_1), который имеет в A ровно одного врага (скажем, депутата D_2). Когда мы в следующий раз отправим в палату A депутата D_3, имеющего в палате ровно одного врага, этим врагом может снова оказаться депутат D_2, и теперь у D_2 в палате A будет два врага — D_1 и D_3, что противоречит требованию задачи.

Утверждение, которое требуется доказать в этой задаче, справедливо. Приведем возможное доказательство.

Разделим депутатов на две палаты произвольно. Если в одной из палат есть депутат, имеющий в ней двух или трёх врагов, переведём его в другую палату. Так будем делать до тех пор, пока такие депутаты имеются. Как только их не станет, задача будет решена. Осталось показать, что это рано или поздно произойдёт. В самом деле, после каждого перехода количество пар депутатов, находящихся в разных палатах и враждующих между собой, увеличивается. Это происходит потому, что добавляются по крайней мере две такие пары, а исчезает не более одной. Но количество таких пар неограниченно возрастать не может (общее количество вообще всех враждующих пар не превосходит $\frac{3N}{2}$, где N — количество депутатов), поэтому обязательно наступит момент, когда из палаты в палату некого будет переводить.

Критерии проверки.

Верно указана ошибка в «решении» и приведено верное решение — 10 баллов.

Верно указана ошибка в «решении», но верное решение не приведено — 7 баллов.

В качестве ошибки указано только то, что все депутаты могли попасть в одну палату — 1 балл.

9. (*Предложил А.В. Хачатурян*)

Учитель, подбирая к контрольной работе упражнения на тему «Теорема Пифагора», нашел в одном из сборников такую задачу: «В прямоугольном треугольнике ABC к катету BC проведена медиана AM. Известно, что $AC = 5$, $AM = 7$. Найдите гипотенузу AB».

— Приятно, что и в условии, и в ответе целые числа, — подумал учитель, решив задачу. — Теперь нужна аналогичная задача с другими числами для второго варианта.

Помогите коллеге. Разумеется, треугольники в двух вариантах задачи не должны быть подобными. Объясните, каким образом Вы нашли требуемые числа. По возможности укажите метод, позволяющий составить много «числовых клонов» данной задачи.

Решение. Пусть $AC = b$, $AB = c$ и $AM = m$. По условию задачи можно составить уравнение $4(m^2 - b^2) = c^2 - b^2$. Отсюда получим, что $4m^2 - c^2 = 3b^2$. Чтобы найти решения этого уравнения в натуральных числах (*как говорят, найти решения диофантова уравнения*), запишем его в виде: $(2m - c)(2m + c) = 3b^2$.

Это равенство будет справедливо, например, если $2m - c = b$ и $2m + c = 3b$, но, как нетрудно убедиться, такой случай приводит к равенству $b = m = c$, что не имеет геометрического смысла.

Попробуем другой подход: положим $2m - c = 3$ и $2m + c = b^2$. Складывая и вычитая эти уравнения, получим, что $m = \frac{b^2 + 3}{4}$; $c = \frac{b^2 - 3}{2}$.

Для того, чтобы число c было целым, необходимо, чтобы число b было нечётным, то есть $b = 2n - 1$, где n — натуральное число. В этом случае: $c = 2n^2 - 2n - 1$; $m = n^2 - n + 1$. При $n < 3$ найденное решение не будет иметь геометрического смысла, при $n = 3$ получится $b = 5$, $c = 11$ и $m = 7$, то есть числа из исходной задачи, а при $n > 3$ — бесконечное число новых троек чисел, например, $b = 7$, $c = 23$, $m = 13$ или $b = 9$, $c = 39$, $m = 21$, и так далее.

Отметим, что найденная серия решений — не единственная. Можно, например, положить $2m - c = 1$ и $2m + c = 3b^2$, тогда возникает другая серия решений: $b = 2n + 1$; $c = 6n^2 + 6n + 1$; $m = 3n^2 + 3n + 1$, где n — любое натуральное число.

Критерии проверки.

Верно найдена формула для получения любой бесконечной серии решений, верно указаны ограничения на переменные и приведен хотя бы один пример — 10 баллов.
Верно найдена общая формула, но не указаны ограничения, либо не приведен пример — 8 – 9 баллов.
Верно записано только уравнение в целых числах, из которого можно находить требуемые отрезки, и подобрано хотя бы одно его частное решение — 5 баллов.
Верно указаны только отдельные примеры — 3 балла.

10. Девятиклассник Вася записал на доске: $(-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

— Вася, ты не прав, — сказала учительница, — отрицательные числа нельзя возводить в дробную степень.

— Почему же нельзя? — заинтересовался Вася. — Вот $(-4)^{\frac{1}{2}}$ действительно не имеет смысла, а с числом $(-8)^{\frac{2}{3}}$ какие проблемы?

— Нельзя по определению, — твердо сказала учительница и ехидно добавила, — а проблемы не с числом $(-8)^{\frac{2}{3}}$, а с учениками, которые правил не учат!

А как бы Вы объяснили своим ученикам, почему никакие степени с отрицательным основанием и дробным показателем в школьных учебниках не определяются, а считается, что они не имеют смысла?

Комментарий. Следуя Васиной логике, $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$. Вместе с тем, $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ (в определении степени с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ используется только арифметический корень!). При этом $\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{2}{6}$ — это две различные записи одного и того же числа (основное свойство дроби!), поэтому при разумном определении результаты должны быть одинаковыми.

На первый взгляд кажется, что это противоречие можно преодолеть, если для четных показателей корня вместо значения арифметического корня брать другой корень (противоположный арифметическому). Но если «уравнять в правах» арифметический корень и число, ему противоположное, то возникнет много проблем. В частности, возникнет проблема с показательной функцией действительного аргумента, которую придется определять и для отрицательных оснований, что не всегда возможно.

Кроме того, в других случаях встречаются противоречия несколько иного рода. Например, $(-1)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-1)^3} = \sqrt[4]{-1}$, что даже с Васиной точки зрения не имеет смысла. Но, с другой стороны, $(-1)^{\frac{3}{4}} = (-1)^{\frac{6}{8}} = \sqrt[8]{(-1)^6} = \sqrt[8]{1} = 1$.

Отметим, что все противоречия исчезают, если основание степени рассматривать как комплексное число, у которого, как известно, есть n корней n-й степени. Но в современной школьной программе комплексные числа не изучаются. Поэтому последнее соображение полезно понимать учителю, но невозможно объяснить ученику, изучающему только общеобразовательную программу.

Критерии проверки.
Верно указано на противоречие с основным свойством дроби или на противоречие со свойством степени: $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ *— 10 баллов.*
В качестве основной проблемы указывалось отсутствие непрерывности показательной функции с отрицательным основанием — 2 балла.
Ссылка только на то, что показательная функция «потеряет» свойство монотонности — 0 баллов.
Отдельно отметим, что многие участники конкурса путают показательную и степенную функции.

Вариант подготовили:
А.Д. Блинков, Е.Б. Гладкова, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц, А.В. Иванищук, А.Г. Мякишев, Д.В. Прокопенко, И.В. Раскина, Л.С. Тимакова, А.В. Хачатурян, Д.Э. Шноль.