Решения.

I. *Каждая задача оценивалась в 10 баллов.*

1. (*А.К. Ковальджи*) Врач сообщил Змею Горынычу, что если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то помрет через 10 лет, а если по 17 сигарет в день, то через 5 лет. Сколько проживет Змей, если бросит курить? (*Условимся, что все годы одинаковой длины, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время.*)

Ответ: 22 года.

Решение. *Первый способ.* Пусть n — искомая величина и пусть в году p дней. Если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то его жизнь сократится на $(n-10)$ лет, и за 10 лет он выкурит $6 \cdot p \cdot 10$ сигарет. Значит, одна сигарета сокращает жизнь на $\dfrac{n-10}{6 \cdot p \cdot 10}$ лет. Если же Змей будет выкуривать по 17 сигарет в день, то его жизнь сократится на $(n-5)$ лет, и за 5 лет он выкурит $17 \cdot p \cdot 5$ сигарет. Значит, одна сигарета сокращает жизнь на $\dfrac{n-5}{17 \cdot p \cdot 5}$ лет. Поскольку каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время, то $\dfrac{n-10}{6 \cdot p \cdot 10} = \dfrac{n-5}{17 \cdot p \cdot 5}$. Решая уравнение, получим: $n = 22$.

Второй способ. Пусть N — количество дней в году. Тогда, выкуривая по 6 сигарет в день, за 10 лет жизни Змей выкурит $60N$ сигарет. Если же он будет курить по 17 сигарет в день, то за 5 лет жизни выкурит $85N$ сигарет. Разница между этими числами — $25N$ соответствует потере Змеем пяти лет жизни. Следовательно, выкурив $5N$ сигарет он потеряет год жизни, а выкурив $60N$ сигарет — 12 лет жизни. Следовательно, если Змей бросит курить, то он проживет $10 + 12 = 22$ года.

Критерии проверки.
Полное обоснованное решение — 10 баллов.

2. (*Фольклор*) Вычислите: $\dfrac{1}{\log_2 100!} + \dfrac{1}{\log_3 100!} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{100} 100!}$.

Ответ: 1.

Решение. Так как $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$, то $\dfrac{1}{\log_2 100!} + \dfrac{1}{\log_3 100!} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{100} 100!} =$ $= \log_{100!} 2 + \log_{100!} 3 + \ldots + \log_{100!} 100 = \log_{100!}(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100) = \log_{100!} 100! = 1.$

Критерии проверки.
Полное обоснованное решение — 10 баллов.

3. (*Санкт-Петербургские математические олимпиады*) Существует ли одиннадцатигранник, у которого количество ребер в каждой грани четно?

Ответ: да, существует.

Решение. Существует много примеров многогранников, удовлетворяющих условию задачи. Попробуем привести рассуждения, показывающие каким образом можно получить некоторые из них.

Один из возможных примеров получится, если изначально рассмотреть самый простой шестигранник с четным количеством ребер в каждой грани — куб. Если поставить один куб на другой (см. рис. 3а), то, казалось бы, условие задачи выполняется, но является ли изображенное тело многогранником? Проблема заключается в том, что одна из граней представляет собой квадрат $ABCD$ с вырезанным из него квадратом и неясно, можно ли считать такую фигуру с «дыркой» многоугольником?

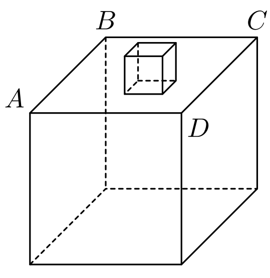

Рис. 3а

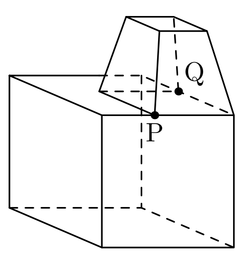

Рис. 3б

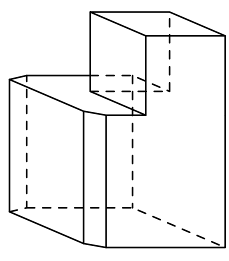

Рис. 3в

Попробуем слегка изменить эту конструкцию: передвинув «верхний» куб в угол, но тогда уменьшится количество граней. Чтобы решить эту проблему, можно поступить, например, так: заменим «верхний» куб на усеченную четырехугольную пирамиду (см. рис. 3б). Но возникает другая проблема:

вершина P одной грани лежит на ребре другой грани (аналогично и вершина Q). Можно ли такое тело считать многогранником?

Можно поступить иначе. Сохраним «верхний» куб, а от «нижнего» куба «отпилим» два ребра (см. рис. 3в).

Можно также попытаться обойтись одним кубом, сделав в нем соответствующие «вырезы». Пример такого многогранника изображен на рис. 3г.

Отметим, что все приведенные тела если и являются многогранниками, то невыпуклыми. Наиболее интересен пример выпуклого многогранника, удовлетворяющего условию (см. рис. 3д). Он получится, если изначально взять десятигранник с четным количеством ребер в каждой грани — правильную восьмиугольную призму, а затем в верней грани $ABCDEFGH$ «поднять» на одинаковое расстояние сначала вершины D и G, а затем вершины C и H. Тем самым, вместо одной грани — восьмиугольника, образуются две грани: четырехугольник $DEFG$ и шестиугольник $ABCDGH$ (и сохранится четность количества ребер в остальных гранях).

Отметим, что в работах участников конкурса встречались также разнообразные примеры тел со «сквозными дырками», см. рис. 3е. Можно ли их считать многогранниками?

Таким образом, примеры, аналогичные 3 в, г и д безусловно удовлетворяют условию задачи, а с остальными примерами будем разбираться, обратившись к определениям многогранника и многоугольника из различных источников.

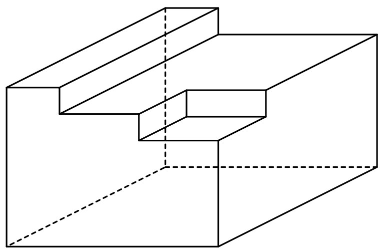

Рис. 3г

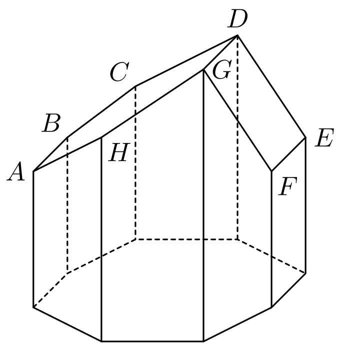

Рис. 3д

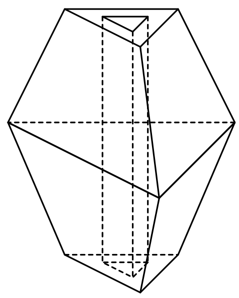

Рис. 3е

1. Математическая энциклопедия, том 3, ст. 708: «Многогранник — совокупность конечного числа плоских многоугольников такая, что: 1) каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне); 2) от любого из многоугольников, составляющих многогранник можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, к смежному с ним, и т. д.»

С точки зрения этого определения пример 3б многогранником не является, так как не выполняется условие 1). Является ли многогранником пример 3а зависит от определения многоугольника.

2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И., Геометрия 10/11, М.: «Просвещение», 1994, стр. 201. «Многогранником называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников». На следующей странице поясняется, что понятие многоугольника можно обобщить: «Многоугольником называется ограниченная замкнутая область, граница которой состоит из конечного числа отрезков».

Отметим, что на тех же страницах на рис. 241 приведены некоторые примеры многогранников, среди которых есть многогранник со сквозными дырками и есть многогранник, у которого часть вершин одной грани лежит на ребрах другой. Здесь же обсуждается, а на рис. 243 изображается многогранник в виде куба, стоящего на кубе.

Далее (в пункте 23.6) обсуждается другой подход к определению многогранника. «Многогранник — это фигура, являющаяся объединением конечного числа тетраэдров, для которых выполнены следующие условия: 1) каждые два тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо только общее ребро, либо целую общую грань; 2) от каждого тетраэдра к другому можно перейти по цепочке тетраэдров, в которой каждый последующий прилегает к предыдущему по целой грани».

Этим определениям удовлетворяют все примеры, рассмотренные выше!

3. Калинин А.Ю., Терёшин Д.А., Стереометрия 10, М.: Физматкнига, 2007 (Глава 6, §6.2. Многогранники и их элементы). «Многогранником называется тело, поверхность которого является объединением конечного числа многоугольников». Перед этим дано определение тела как «...объединения ограниченной пространственной области и ее границы; пространственная область — непустое открытое связное множество точек». Там же, на стр. 166 приведен пример неодносвязного многогранника.

Этим определениям безусловно удовлетворяют все тела с «дырками».

4. Атанасян Л.С. и др, Геометрия 10 –11, М.: «Просвещение», 1992, стр. 60 (Глава III, §1). «Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником. Тело, ограниченное многогранником, часто тоже называют многогранником».

5. Погорелов А.В., Геометрия 7–11, «Просвещение», 1995 (§19. Многогранники, пункт 168.) «Многогранник — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников».

Поскольку в источниках 3 – 5 не уточняется, что понимается под многоугольниками (а в учебнике И.Ф. Шарыгина вообще не дается определения произвольного многогранника), то они вряд ли помогут нам разобраться с примерами типа 3а и 3б.

Обсудив все это, жюри приняло решение засчитывать в качестве правильных все примеры, удовлетворяющие хотя бы одному из возможных определений многогранника.

4. (*Фольклор*) Докажите, что $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2+2ac}{a^2+c^2}+\dfrac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$, где a, b и c — стороны некоторого треугольника.

Решение. Приведем два из возможных способов доказательства.

Первый способ. Рассмотрим разность между левой и правой частью доказываемого неравенства. Получим: $\left(\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}-1\right)+\left(\dfrac{b^2+2ac}{a^2+c^2}-1\right)+\left(\dfrac{c^2+2ab}{a^2+b^2}-1\right)$.

Докажем, что выражение в первой скобке положительно:

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}-1=\frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{b^2+c^2}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{b^2+c^2}>0,$$

что следует из неравенства треугольника. Аналогично доказывается, что выражения во второй и в третьей скобке положительны. Таким образом, рассмотренная разность положительна, следовательно, исходное неравенство доказано.

Отметим, что неравенство треугольника можно было использовать иначе, например: $a>|b-c|$, *следовательно,* $a^2>(b-c)^2\Leftrightarrow a^2+2bc>b^2+c^2$, *значит,* $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1$.

Второй способ. Из теоремы косинусов следует, что $a^2+b^2=c^2+2ab\cos C<c^2+2ab$, откуда $\dfrac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>1$. Аналогично доказывается, что $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1$ и $\dfrac{b^2+2ac}{a^2+c^2}>1$. Складывая три полученных верных неравенства, получаем искомое.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 баллов

Возведение в квадрат неравенства $a>b-c$, если не объяснено, что $b\geqslant c$ — 8 баллов

5. (*Фольклор*) В остроугольном треугольнике ABC ортоцентр (*точка пересечения высот*) H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. Найдите угол AMB, где M — середина этой высоты.

Ответ: 90°.

Решение. Приведем три из возможных способа решения.

Первый способ. Из условия задачи следует, что $HM=HC_1$ (см. рис. 5а). Пусть D — середина отрезка BC_1, тогда DM — средняя линия треугольника BCC_1, значит, $DM\parallel BC$, поэтому отрезок DM перпендикулярен высоте AA_1 треугольника ABC.

Следовательно, точка H является также и ортоцентром треугольника AMD, значит, прямая DH содержит высоту этого треугольника. Но отрезок DH является средней линией треугольника BMC_1, значит, $DH\parallel BM$, поэтому, отрезки AM и BM перпендикулярны.

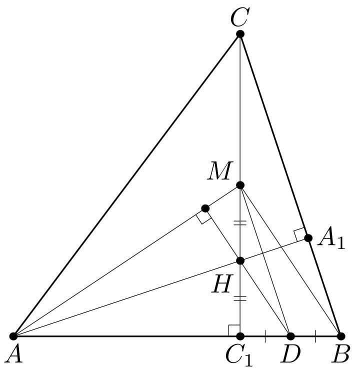

Рис. 5а

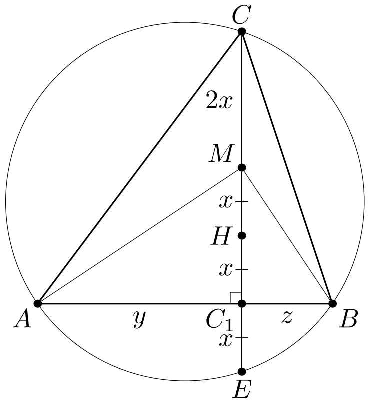

Рис. 5б

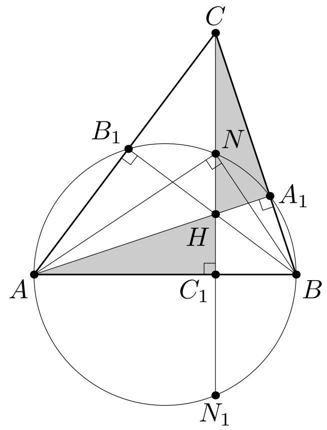

Рис. 5в

Второй способ. Воспользуемся тем, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника. Пусть точка E симметрична ортоцентру H относительно AB (см. рис. 5б). Тогда $EC_1 = HC_1 = x$, $MC_1 = MC = 2x$, $AC_1 = y$, $BC_1 = z$.

Из прямоугольных треугольников AC_1M и BC_1M получим, что $AM^2 = y^2 + 4x^2$, $BM^2 = z^2 + 4x^2$. Кроме того, для отрезков пересекающихся хорд AB и CE окружности справедливо равенство $AC_1 \times$ $\times\, BC_1 = CC_1 \cdot EC_1$, то есть $yz = 4x^2$. Таким образом, $AM^2 + BM^2 = y^2 + z^2 + 8x^2 = (y + z)^2 = AB^2$, значит, $\angle AMB = 90^\circ$.

Третий способ. Проведем высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC, тогда около четырехугольника AB_1A_1B можно описать окружность. Пусть она пересекает высоту CC_1 в точке N. Так как AB — диаметр окружности, то $\angle ANB = 90^\circ$. Докажем, что точка N совпадает с точкой M — серединой высоты.

Рассмотрим точку N_1 окружности, симметричную N относительно прямой AB. Так как прямоугольные треугольники AC_1H и CA_1H подобны, то $\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{C_1H}{A_1H}$. Следовательно, $CH \cdot C_1H =$ $= AH \cdot A_1H = NH \cdot N_1H$ (последнее равенство следует из свойства отрезков хорд окружности).

Пусть $C_1H = x$; $NH = y$, тогда, по условию, $CH = 3x$; $N_1H = 2x + y$.

Получим уравнение $3x^2 = y(2x + y) \Leftrightarrow y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$. Решая его как квадратное относительно переменной y, получим, что $y = x$ или $y = -3x$. Второе равенство невозможно, значит, $NH = C_1H$, что и требовалось.

Существует также вариация этого способа решения, в которой вместо подобия используется теорема об отрезках секущих.

Можно также использовать векторный или координатный метод.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 баллов

Использование обратного утверждения со ссылкой на прямое — 7 баллов

Указана только окружность, на которой лежат две вершины треугольника и два основания высоты — 1 балл

Приведен только ответ — 0 баллов.

II. Методический блок

Каждое задание оценивалось в 10 баллов.

6. (*Предложил Д.Э. Шноль*) Ученик пришел к учителю и сообщил, что нашел ошибку в пособии по математике. Он показал следующий текст.

Задача. Разложите на множители выражение $x^4 - 3x^2 - 4$.

Решение. Сделаем замену переменной: $x^2 = y$ и разложим на множители квадратный трехчлен $y^2 - 3y - 4$, решив квадратное уравнение $y^2 - 3y - 4 = 0$. Его корни: $y_1 = -1$; $y_2 = 4$. Значит, $y^2 - 3y - 4 = (y + 1)(y - 4)$. Следовательно, $x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Ошибка, по мнению ученика, состоит в следующем: так как $x^2 = y$, то $y \geqslant 0$. Значит, корень $y_1 = -1$ — посторонний, и дальнейшее решение неверно.

Что Вы бы ответили на это ученику?

Комментарий. Во-первых, можно сначала убедить ученика, что получен верный ответ. Для этого достаточно предложить ему раскрыть скобки в полученном произведении, либо предложить разложить на множители исходное выражение способом группировки.

Во-вторых, объяснить, что и в приведенном решении нет ошибки, можно, например, так: поскольку равенство $y^2 - 3y - 4 = (y+1)(y-4)$ является тождеством, то оно верно для всех действительных значений y, в частности, и для неотрицательных. Поэтому, подставляя в это равенство x^2 вместо y, мы также получаем тождество.

А полученный отрицательный корень вспомогательного квадратного уравнения говорит, в данном случае, только о том, что выражение $x^2 + 1$ на множители не разложится.

Критерии проверки.

Приведено полное и подробное объяснение, доступное школьнику — 10 баллов

Приведено недостаточно четкое объяснение или трудное для понимания школьником — 8 баллов

Отсутствует четкое указание на то, что разложение на множители и решение уравнения — это разные задачи — 0 баллов

Рассуждения, касающиеся комплексных чисел, на наш взгляд не отвечают на поставленный вопрос. Ученику, не понявшему простое разложение на множители, бессмысленно объяснять более сложные вещи.

7. (*предложила И.В. Раскина*) В двух вариантах контрольной работы по теории вероятностей и статистике были предложены такие задачи:

Вариант 1. В семье двое детей. Известно, что среди них есть мальчик. С какой вероятностью оба ребенка — мальчики?

Вариант 2. В семье двое детей. Известно, что старший из них мальчик. С какой вероятностью оба ребенка — мальчики?

Вася, решавший задачу варианта 1, написал следующее: «По условию задачи один из детей мальчик. Второй может быть как мальчиком, так и девочкой с одинаковой вероятностью. Поэтому оба ребенка мальчики с вероятностью $\frac{1}{2}$.»

Петя, решавший вариант 2, полностью списал его решение.

Как бы Вы оценили правильность этого решения (для каждого из вариантов)? Считаете ли Вы предложенные варианты равноценными?

Комментарий. Пусть в семье двое детей, про пол которых ничего не сказано. Этой ситуации соответствует пространство из 4 элементарных событий: ММ, МД, ДМ, ДД. Решая задачу второго варианта, можно сразу рассматривать только два равновероятных события: ММ и МД. Или, как оказалось в Петином списанном решении, М и Д. Поэтому для второго варианта следует признать приведенное решение верным. Придираться к краткости решения или к тому, что вместо слов «старший» и «младший» записано «один» и «второй» вряд ли имеет смысл.

А вот свою задачу Вася решил неверно и получил неверный ответ. В первом варианте роли детей не разделены, поэтому из 4 элементарных событий общего случая (ММ, МД, ДМ, ДД) здесь могут реализоваться с равной вероятностью любое из трех событий: ММ, МД, ДМ. Поэтому вероятность того, что оба ребенка мальчики, равна $\frac{1}{3}$.

Задача второго варианта проще. Для ее решения можно рассматривать любое из пространств элементарных событий (ММ, МД, ДМ, ДД или М, Д). Ее ответ интуитивно ясен. Задача первого варианта требует гораздо более глубокого понимания материала.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 баллов

Верно оценено решение задачи в обоих вариантах — 8 баллов

Верно объяснено, что варианты неравноценны — еще 2 балла

Верно оценено решение только одной из задач — от 2 до 4 баллов

В предложенных «задачах» и «теореме» (задания №8 – №10) могут содержаться математические ошибки (как в условиях, так и в «решениях» или «доказательствах»). Если некорректно условие «задачи» («теоремы»), то объясните, почему это так, и найдите все ошибки в «решении» («доказательстве»). Если неверно только «решение» («доказательство»), то укажите все ошибки и приведите верное решение (доказательство).

8. (*предложил В.М. Гуровиц*) **«Задача».** Два приятеля пришли на базар. Веселый молодец продавал 20 котов по цене от 12 до 15 рублей и 20 мешков по цене от 30 копеек до 1 рубля. Докажите, что каждый из друзей может купить по коту в мешке так, чтобы они заплатили одинаковую сумму денег.

«Решение». Заметим, что наименьшая стоимость кота в мешке — 12 рублей 30 копеек, а наибольшая — 16 рублей. Следовательно, количество вариантов возможных стоимостей кота в мешке не превышает количества целых чисел на отрезке $[1230; 1600]$, то есть не больше, чем 371. Вместе с тем, количество различных пар вида «кот — мешок» равно $20 \cdot 20 = 400$. Следовательно, по принципу Дирихле, найдутся две пары, имеющие одинаковую стоимость.

Комментарий. В задаче предложено доказать неверное утверждение. Действительно, если цены всех котов одинаковы, а цены мешков — различны, то покупка неосуществима. Ошибка в решении заключается в том, что пары «кот — мешок» с одинаковой стоимостью могут содержать одного и того же кота (или один и тот же мешок) и поэтому не могут быть куплены.

Критерии проверки.

Показано, что условие задачи неверно и найдена ошибка в решении — 10 баллов

Показано только(с примером), что условие задачи неверно — 5 баллов

Указано только, что полученные в «решении» по принципу Дирихле пары нельзя купить, т.к. они могут пересекаться по коту или по мешку — 5 баллов

9. (*предложил А.Д. Блинков*) **«Задача».** В треугольнике ABC медиана AM равна высоте BH. Кроме того, равны углы MAB и HBC. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

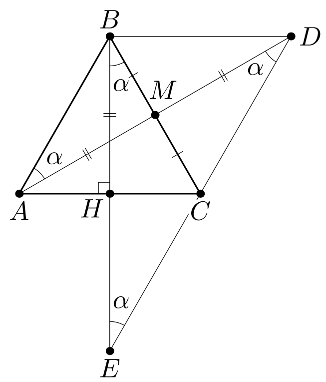

Рис. 9а

«Решение». Пусть $\angle MAB = \angle HBC = \alpha$ (см. рис. 9а). На луче AM отметим точку D так, что $DM = AM$, тогда $ABDC$ — параллелограмм и $\angle ADC = \angle DAB = \alpha$. На луче BH отметим точку E так, что $EH = BH$, тогда $EC = BC$ и $\angle CEB = \angle CBE = \alpha$.

Так как $HC \parallel BD$, то $EC = CD$ (по теореме Фалеса). Тогда $\triangle ADC = \triangle BEC$ ($AD = BE$, $DC = EC$, $\angle ADC = \angle BEC$). Следовательно, $AC = BC$ и треугольник ACD — равнобедренный: $AC = CD = AB$. Таким образом, треугольник ABC — равносторонний, что и требовалось.

Комментарий. *Отметим сначала, что многие участники конкурса посчитали, что условие задачи может выполняться для прямоугольного треугольника с углами* $30°$ *и* $60°$, *то есть, что точка H может совпадать с вершиной A треугольника. На взгляд жюри, это не так, поскольку в геометрических задачах существует негласная договоренность о том, что различными буквами обозначаются различные точки. В противном случае многие геометрические утверждения становятся бессмысленными. Например, невозможно вести речь о прямой* AB, *если точки A и B могут совпадать. Если бы высота и медиана в условии задачи не были поименованы, то с возможностью совпадения точек можно было бы согласиться.*

На самом деле, условие задачи неверно. Единственным контрпримером является тупоугольный треугольник (см. рис. 9б). Показать, что для него выполняется условие $AM = BH$ можно, например, следующим образом. Опустим перпендикуляр MK из точки M на прямую AC. Поскольку $\angle MAK = 30°$, то $MK = \frac{1}{2}AM$. С другой стороны, MK — средняя линия в треугольнике CBH, откуда $MK = \frac{1}{2}BH$. Следовательно, $AM = BH$.

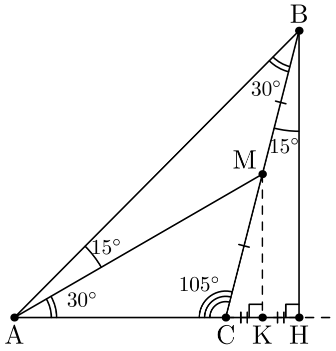

Рис. 9б

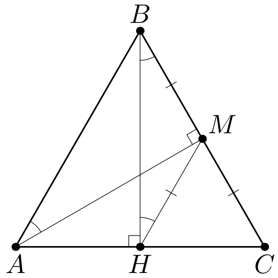

Рис. 9в

Кроме того, есть ошибка и в приведенном «решении». Она заключается в том, что в нём неявно предполагается, что E, C и D лежат на одной прямой (иначе нельзя пользоваться теоремой Фалеса), а это ниоткуда не следует.

Если же в условии задачи оговорить, что треугольник — остроугольный, то утверждение становится верным, и доказать его можно, например, следующим способом.

Из условия задачи будет следовать, что HM — медиана прямоугольного треугольника BCH, проведенная к гипотенузе, значит, $HM = \frac{1}{2}BC = BM$. Тогда треугольник BMH — равнобедренный, значит, $\angle MHB = \angle HBC$. Используя также, что $\angle HBC = \angle MAB$ (по условию), получим, что $\angle MHB = \angle MAB$ (см. рис. 9в).

Таким образом, отрезок BM виден из точек A и H под одинаковыми углами, поэтому точки A, B, M и H лежат на одной окружности. Так как прямой угол AHB — вписанный, то AB — диаметр этой окружности, тогда вписанный угол AMB — также прямой.

Следовательно, медиана AM треугольника ABC является также и его высотой, поэтому треугольник ABC — равнобедренный: $AB = AC$. Кроме того, равны прямоугольные треугольники AMC и BHC ($AM = BH$, угол C — общий). Следовательно, $AC = BC$. Таким образом, треугольник ABC — равносторонний, что и требовалось.

Критерии проверки.

I случай: участник считает, что условие верно

Верно найдена ошибка в доказательстве — 2 балла

Найдена ошибка и приведено верное (для остроугольного треугольника) доказательство — еще 2 балла

II случай: участник считает, что условие неверно

Указано, что условие задачи не выполняется для прямоугольного треугольника или указано, что условие задачи не выполняется для тупоугольного треугольника, но пример не приведен — 2 балла

Найдена ошибка в доказательстве — еще 2 балла

Приведен пример тупоугольного треугольника, удовлетворяющего условию — еще 6 баллов

10. (*предложили А.В. Иванищук и А.Г. Мякишев*) **«Теорема».** Если функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ и не является постоянной ни на каком из промежутков, то функция $f(f(x))$ возрастает на $\mathbb{R}$.

«Доказательство». Если у функции $f(x)$ нет экстремумов, то она либо возрастает, либо убывает на $\mathbb{R}$. Так как композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая, то в этом случае $f(f(x))$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет экстремумы в точках x_1, x_2, …, x_n. Тогда, в силу непрерывности, эта функция строго монотонна: на $(-\infty; x_1]$, на каждом промежутке вида $[x_k; x_{k+1}]$ (где k принимает все натуральные значения от 1 до $n-1$), и на $[x_n; +\infty)$.

Действительно, если бы на каком-то из указанных промежутков это было не так, то «при переходе слева направо» через некоторую внутреннюю точку x_0 этого промежутка вид монотонности должен был измениться, например с убывания на возрастание (из условия следует, что промежутков, на которых функция постоянна, нет). Тогда, по определению, x_0 — еще одна точка экстремума (в нашем случае — точка минимума), но эта точка отлична от x_1, x_2, …, x_n.

Таким образом числовая прямая разбивается на промежутки, которые пересекаются только граничными точками, на каждом из которых функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает. Но композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая. Поэтому $f(f(x))$ — возрастающая функция, что и требовалось доказать.

Комментарий. «Теорема» не верна. Например, если взять функцию $f(x) = x^2$, то функция $f(f(x)) = x^4$ не является возрастающей функцией (убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$. Дело в том, что утверждение «композиция как двух возрастающих функций, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая» подразумевает, что обе функции монотонны на множестве $\mathbb{R}$. Для функций вида $f(f(x))$ оно может оказаться верным, если $f(x)$ монотонна на промежутке M, и ее множество значений содержится в том же промежутке M.

В приведенном примере функция $f(x) = x^2$ отображает промежуток $(-\infty; 0]$ не в себя, а на промежуток $[0; +\infty)$. Другим возможным простым примером, опровергающим утверждение «теоремы», является функция $f(x) = |x|$.

Эти примеры наглядно показывают характер ошибки: утверждение, справедливое для монотонных функций, применяется в последней части «доказательства» к кусочно-монотонным функциям.

Кроме того, допущена ошибка и в доказательстве, поскольку отсутствие промежутков, на которых функция постоянна, не означает, что количество точек экстремума конечно, ведь их может быть счетное число. Тем самым утверждение о том, что числовая прямая разбивается на не перекрывающиеся промежутки монотонности функции $f(x)$, приведенное, в «доказательстве», также не верно.

На этот счет существует «классический» пример, предложенный известным алгебраистом Ван дер Варденом. Продолжим функцию $f_1(x) = |x|$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ периодически на всю числовую прямую, с периодом $T = 1$. Положим далее: $f_n(x) = 4^{1-n} \cdot f_1(4^{n-1} \cdot x)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится к некоторой непрерывной функции $f(x)$ (грубо говоря, состоящей почти сплошь из изломов), обладающей парой необычных свойств. Во-первых, на любом интервале числовой прямой эта функция не является монотонной и, во-вторых, она не имеет производной ни в одной точке.

Доказательство этих фактов можно прочитать, например, в книжке Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе (М.: URSS-ЛКИ, 2007).

Другим возможным контрпримером является функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

Критерии проверки.

Указано, что «теорема» неверна и приведен контрпример — 4 балла

В «доказательстве»:

Указана причина, по которой композиция кусочно-монотонных функций не всегда монотонна — еще 2 балла

Указано, что точек экстремума может быть бесконечно много — еще 2 балла

Указано, что существуют непрерывные не постоянные нигде не монотонные функции — еще 2 балла

* *Жюри решило не придираться еще к одной неточности текста «доказательства»: в рассуждении «от противного» вывод о том, что x_0 является точкой экстремума, сделан со ссылкой на определение, хотя, если подходить формально, использовано достаточное условие точки экстремума.*

Вариант подготовили:

А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков, Е.Б. Гладкова, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц, А.В. Иванищук, А.Г. Мякишев, Н.М. Нетрусова, И.Б. Писаренко, И.В. Раскина, А.В. Хачатурян, П.В. Чулков, Д.Э. Шноль.