Решения.

I. *Каждая задача оценивалась в* 10 *баллов.*

1. (*Фольклор, из архивов турнира Архимеда*) В мешке лежат белые и красные шары. Вася вынул один шар, затем заглянул в мешок и сказал: «$\frac{5}{7}$ оставшихся шаров — белые», после чего положил шар обратно в мешок. Затем один шар вынула Маша, заглянула в мешок и сказала: «$\frac{12}{17}$ оставшихся шаров — белые». Сколько шаров было в мешке первоначально?

Ответ: 120 шаров.

Решение. Так как $\frac{5}{7} \neq \frac{12}{17}$, то Вася и Маша вынимали шары разных цветов. Пусть после вытягивания одного шара в мешке осталось x шаров. Тогда $\frac{5}{7}x - \frac{12}{17}x = \frac{1}{119}x$ составляет один шар. Следовательно, $x = 119$, а первоначально шаров было 120.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 баллов.

Приведено верное решение, но дан ответ не на тот вопрос, который поставлен в задаче — 8–9 баллов

Доказано только, что количество шаров равно $119k + 1$, но не доказано, что $k = 1$ — 5 баллов

Верно составлено уравнение или система уравнений, но она не решена, либо решена неверно — 1 балл

Приведен только ответ — 0 баллов

2. (*А. Хачатурян*) Автобус приходит на остановку каждые 15 минут, а маршрутка — каждые 10 минут. Известно, что маршрутка ушла с остановки 2 минуты назад. Что теперь с большей вероятностью приедет раньше: автобус или маршрутка?

Ответ: автобус.

Решение. Маршрутка приедет на остановку через 8 минут. Поскольку про автобус ничего, кроме интервала движения, не известно, будем считать, что он приедет в случайный момент времени, начиная от текущего момента t и кончая моментом $t + 15$. Вероятность попадания времени приезда автобуса в диапазон $[t; t+8]$ (то есть, до приезда маршрутки), равна отношению длины этого диапазона к интервалу движения, то есть $\frac{8}{15}$, значит, вероятность приезда автобуса после маршрутки равна $\frac{7}{15}$. Таким образом, более вероятным событием будет приезд автобуса раньше маршрутки.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 баллов.

Приведен только ответ либо ответ с неверными обоснованиями — 0 баллов

3. (*Фольклор, из зарубежных публикаций Р. Хонсбергера*) В треугольнике ABC точка H_1, симметрична ортоцентру (*точке пересечения высот*) H относительно вершины C, а точка C_1 симметрична точке C относительно середины стороны AB. Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC, является серединой отрезка H_1C_1.

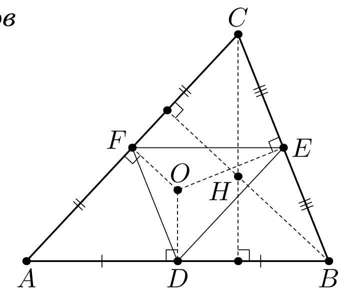


Рис. 3а

Решение. *Первый способ.* Используем известный геометрический факт: в любом треугольнике расстояние от вершины до ортоцентра в два раза больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противолежащей стороны.

Его, например, можно получить, используя гомотетию с центром в точке M пересечения медиан с коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$, либо из подобия треугольника ABC и его «срединного» треугольника EFD (см. рис. 3а, б, *где $CH = 2OD$).*

Пусть D — середина стороны AB, а прямые H_1O и CC_1 пересекаются в некоторой точке C_2 (см. рис. 3в, г). Тогда $OD \parallel H_1C$ и $2OD = CH = CH_1$. Следовательно, OD — средняя линия треугольника H_1CC_1, то есть $CD = C_2D$. Следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают, значит, O — середина H_1C_1, что и требовалось.

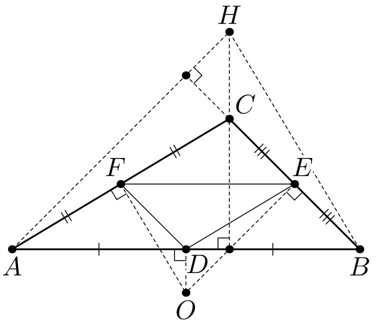


Рис. 3б

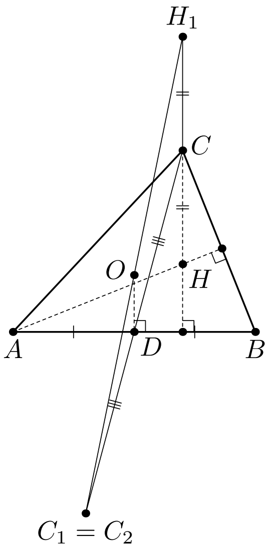


Рис. 3в

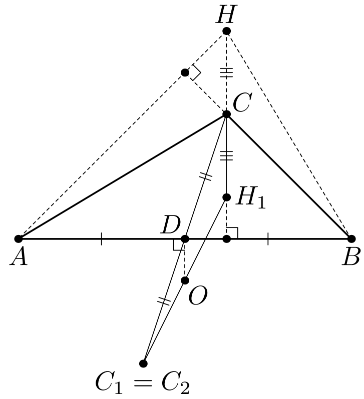


Рис. 3г

Второй способ. Можно использовать другой известный геометрический факт: точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника и диаметрально противоположны соответствующим вершинам.

Его, например, можно получить, используя композицию двух осевых симметрий: относительно стороны и относительно диаметра описанной окружности, ей перпендикулярного.

Тогда, если точка H_2 симметрична точке H относительно точки D — середины AB, то CH_2 — диаметр описанной окружности (см. рис. 3 д, е). Кроме того, равны треугольники DCH и DC_1H_2. Тогда треугольник OC_1H_2 будет равен треугольнику OH_1C, из чего и следует утверждение задачи.

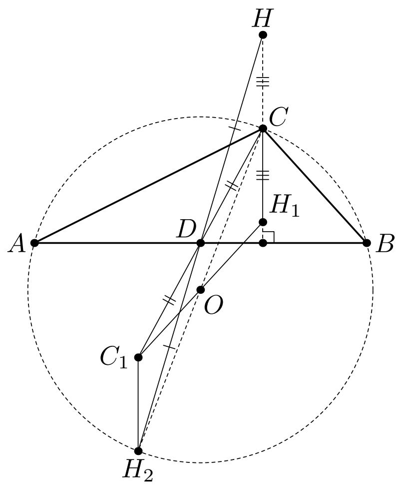


Рис. 3д

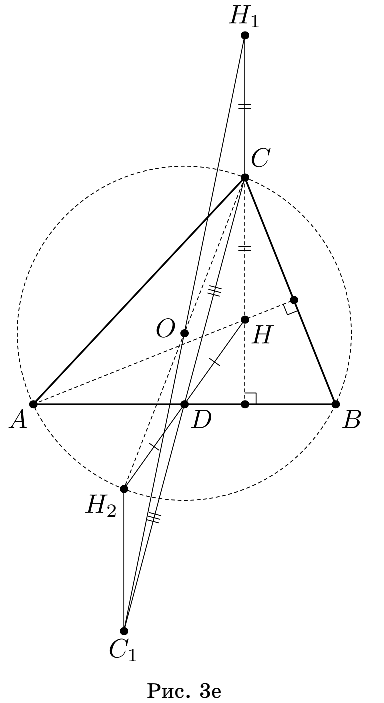


Рис. 3е

Существуют и другие способы решения.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение — 10 *баллов.*
Решение, в целом, верное, но допущены неточности или пробелы в обоснованиях — 7 *баллов*
Допущены вычислительные ошибки в «координатном» решении — 0 *баллов*

Доказывать общеизвестные утверждения, связанные со «срединным» треугольником, прямой Эйлера, точками, симметричными ортоцентру относительно сторон, и т. д., от участников не требовалось.

4. (*В. Произволов, ММО,* 1996 *год, задача* 8.2) По окружности, чередуясь, расположены 10 гирек различной массы и 10 шариков. Масса каждого шарика равна разности масс двух соседних с ним гирек. Можно ли разложить шарики на две кучки равной массы?

Ответ: да, можно.

Решение. Обойдем гирьки по часовой стрелке, начав с любой из них и закончив на ней же. Если масса следующей гирьки больше массы предыдущей, то поставим перед массой лежащего между ними шарика знак «+», а если масса следующей гирьки меньше, то поставим знак «$-$». Сумма масс всех шариков с учетом поставленных знаков равна нулю. Поэтому, сумма масс «положительных» шариков равна сумме масс «отрицательных» шариков.

Это решение можно изложить и более формально. Обозначим массы гирек через m_i, а массы шариков — через x_i. Запишем верное равенство: $(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \ldots + (m_9 - m_{10}) + (m_{10} - m_1) = 0$. Модуль каждой из разностей в скобках равен массе соответствующего шарика. Следовательно, это равенство можно записать по-другому: $\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_9 \pm x_{10} = 0$. Положим на левую чашу весов те шарики, перед массами которых стоит знак плюс, а на правую — те шарики, перед массами которых стоит знак минус. Тогда весы будут в равновесии.

Критерии проверки.
Полное обоснованное решение — 10 баллов

5. (*А. Блинков*) Существуют ли такие попарно различные нелинейные функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, определенные на каких-либо бесконечных множествах, что $f(g(x)) = h(x)$ и $f(h(x)) = g(x)$?

Ответ: да, существуют.

Решение. Вот один из множества возможных примеров.

Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, тогда $f(g(x)) = \dfrac{1}{x^2} = h(x)$ и $f(h(x)) = x^2 = g(x)$.

Этот пример можно было получить из следующих соображений: из равенств $f(g(x)) = h(x)$ и $f(h(x)) = g(x)$ следует, что $f(f(g(x))) = f(h(x)) = g(x)$.

Таким образом, $f^{-1}(x) = f(x)$. Простейшей нелинейной функцией, обладающей таким свойством, является функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Выберем $g(x)$ по своему усмотрению, например, $g(x) = x^2$, а $h(x)$ найдем из условия $h(x) = f(g(x)) = x^{-2}$. Для построенной тройки функций, очевидно, условие $f(h(x)) = g(x)$ так же будет выполнено.

Покажем, как можно найти другие функции, обладающие свойством $f^{-1}(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию двух переменных $F(x; y)$, обладающую таким свойством: $F(x; y) = F(y; x)$ (симметрическую функцию). Из уравнения $F(x; y) = c$ выразим через x и получим функцию (x), обладающую свойством $y^{-1}(x) = y(x)$. Например, возьмем функцию $F(x; y) = e^x + e^y$ и рассмотрим уравнение $e^x + e^y = 1$. Выразим y: $y = \ln(1 - a^x)$. Возьмем какую-нибудь функцию $g(x)$, например, $g(x) = \ln x$, найдем $h(x) = f(g(x)) = \ln(1 - x)$. Полученные функции $f(x) = \ln(1 - e^x)$, $g(x) = \ln x$ и $h(x) = \ln(1 - x)$ обладают необходимыми свойствами.

Приведем еще два естественных примера, использующих свойства тригонометрических функций:

1) *Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, $h(x) = \operatorname{ctg} x$, тогда $f(g(x)) = \operatorname{ctg} x = h(x)$ и $f(h(x)) = \operatorname{tg} x = g(x)$.*

2) *Пусть $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = |\sin x|$, $h(x) = |\cos x|$, тогда $f(g(x)) = |\cos x| = h(x)$ и $f(h(x)) = |\sin x| = g(x)$.*

Критерии проверки.
Приведен любой верный пример — 10 баллов

II. Методический блок

Каждое задание оценивалось в 10 баллов.

6. (*Из брошюры В.А. Смирнов. ЕГЭ* 2010. *МАТЕМАТИКА. ЗАДАЧА* B9 / *Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. — М.: МЦНМО*, 2010. *Предложил Д. Мухин*)

В приведенном ниже тексте (опубликованном в одном из пособий для школьников) могут содержаться математические ошибки и неточности (как в «условии задачи», так и в «решении»). Укажите их и обоснуйте свое мнение. Если «решение» неверно, то приведите верное решение.

«Задача». Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{6}$ и образует углы 30°, 45° и 60° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите его объем.

«Ответ»: 4,5.

«Решение». Угол между диагональю параллелепипеда и его гранью — это острый угол прямоугольного треугольника, противолежащим катетом которого является ребро параллелепипеда. Поэтому, измерения параллелепипеда равны: $a = \sqrt{6}\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $b = \sqrt{6}\sin 45^\circ = \sqrt{3}$; $c = \sqrt{6}\sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Искомый объем: $V = abc = 4{,}5$.

Комментарий. Условие «задачи» противоречиво. Это можно обнаружить непосредственной проверкой равенства $d^2 = a^2+b^2+c^2$, где a, b и c — измерения прямоугольного параллелепипеда, d — его диагональ. Действительно, $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9$, а $d^2 = 6$.

Дело в том, что если заданы два угла между диагональю прямоугольного параллелепипеда и его гранями, то третий угол определяется однозначно. Действительно, пусть эти углы равны α_1, β_1 и γ_1, тогда измерения параллелепипеда соответственно равны $d\sin\alpha_1$, $d\sin\beta_1$ и $d\sin\gamma_1$. Подставляя это в равенство $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, получим, что $\sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1 + \sin^2\gamma_1 = 1$.

Отметим также, что углы α, β и γ, которые диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами, дополняют рассмотренные углы до 90°. Поэтому, для таких углов выполняется равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

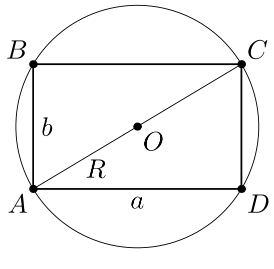
И вообще, если вектор $\vec{a}$ в пространстве образует с осями ортогональной системы координат углы α, β и γ, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, поэтому любой ненулевой вектор $\vec{a}$ в декартовой системе координат можно записать в виде $\vec{a} = |\vec{a}|\left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right)$, тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Критерии проверки.
Верно объяснено, почему некорректно условие задачи — 10 баллов
Объяснение, в целом, верное, но в процессе рассуждений допущена вычислительная ошибка — 7 баллов

7. (*Использован №324 из учебника для 10–11 классов. Алгебра и начала анализа. / Под. ред. А.Н. Колмогорова — М.: «Просвещение»*, 1990. *Предложила И. Раскина*)

Предположим, что Вы хотите разобрать с десятиклассниками различные методы решения задач на экстремальные значения. На дом была предложена задача: «Найдите длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в окружность радиуса R». Вызванный к доске ученик изложил свое «решение» (см. ниже).

Укажите все ошибки, неточности и пробелы в этом «решении». Каким образом их можно исправить? Какие еще способы решения этой задачи Вы бы обсудили с учениками?



«Решение». Пусть a и b — длины сторон прямоугольника, вписанного в данную окружность (см. рисунок), тогда его площадь $S = ab$. Так как диагональ прямоугольника является диаметром окружности, то $a^2 + b^2 = 4R^2$, то есть $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Тогда $S = a\sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{4R^2a^2 - a^4}$.

Рассмотрим функцию $f(a) = 4R^2a^2 - a^4$. Ее производная: $f'(a) = 8R^2a - 4a^3 = 4a\left(2R^2 - a^2\right)$; $f'(a) = 0$ при $a = R\sqrt{2}$. При этом, слева от этой точки $f'(a) > 0$, то есть функция возрастает, а справа $f'(a) < 0$, то есть функция убывает. Следовательно, $a = R\sqrt{2}$ — точка максимума. В этой точке функция $f(a)$ принимает свое наибольшее значение, значит, и значение S в этой точке будет наибольшим. Следовательно, $b = a = R\sqrt{2}$, то есть искомый прямоугольник является квадратом со стороной $R\sqrt{2}$.

Комментарий. В приведенном «решении» допущены следующие ошибки, неточности и пробелы:

1) Не указан промежуток, на котором рассматривается функция $f(a)$. Если его не ограничить, по крайней мере, слева, то появляется еще одна точка, в которой $f'(a) = 0$, а именно, $a = -R\sqrt{2}$.

2) Не указано, что функция $f(a)$ всюду дифференцируема. Если это не так, то могут появиться еще критические точки.

3) Из того, что найдена точка максимума функции $f(a)$, не следует, что именно в этой точке $f(a)$ принимает наибольшее значение. Для этого необходимо, чтобы функция была определена на интервале,

непрерывна на нем (что также не указано), и чтобы эта точка максимума была единственной критической точкой на этом интервале.

4) Не обосновано, почему функция $S(a)$ принимает наибольшее значение в той же точке, что и функция $f(a)$.

Устранить ошибки, указанные в пунктах 1) – 3) можно двумя способами, которые используют разные алгоритмы поиска экстремальных значений функции:

Первый способ. Можно, исходя из смысла задачи, рассматривать $a \in (0; 2R)$. Тогда $f'(a)$ всюду определена и $a = R\sqrt{2}$ действительно является единственной критической точкой на этом промежутке, причем точкой максимума. Далее указать, что функция $f(a)$ непрерывна на $(0; 2R)$, так как $f(a)$ — многочлен, поэтому в этой точке $f(a)$ принимает свое наибольшее значение.

Второй способ. Можно рассматривать функцию $f(a)$ на $[0; 2R]$ (то есть включая случаи, когда прямоугольник «вырождается» в отрезок) и, не находя промежутки монотонности, сравнить значения: $f(0)$, $f(R\sqrt{2})$ и $f(2R)$. Далее сослаться на то, что функция, непрерывная на отрезке, принимает экстремальные значение в критических точках или на концах отрезка.

Для устранения пробела, указанного в пункте 4), можно, например, указать, что функция $S(a) = \sqrt{4R^2a^2 - a^4}$ является композицией функций $t = f(a)$ и $S = \sqrt{t}$, причем функция $S = \sqrt{t}$ непрерывная и возрастающая. Следовательно, наибольшее значение функции $S(a)$ достигается в той же точке $a = R\sqrt{2}$.

Отметим также, что оба указанных алгоритма поиска экстремального значения можно было использовать, рассматривая сразу производную функции $S(a)$, что технически несколько сложнее, но избавляет от рассуждений о композиции функций.

Приведем еще четыре возможных способа решения этой задачи (два «алгебраических» и два «геометрических»):

1) Значение a, при котором функция $f(a)$, рассмотренная выше, принимает наибольшее значение, можно найти иначе. Действительно, $4R^2a^2 - a^4 = -\left(a^4 - 2a^2 \cdot 2R^2 + 4R^4\right) + 4R^4 = -\left(a^2 - 2R^2\right)^2 + 4R^4 \leqslant 4R^4$, причем равенство достигается при $a = R\sqrt{2}$.

2) Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2b^2} = ab$ (так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$). Из условия задачи следует, что левая часть неравенства фиксирована (равна $2R^2$). Следовательно, наибольшее значение правой части достигается, если $a = b = R\sqrt{2}$.

3) Пусть угол между диагоналями прямоугольника равен φ, тогда его площадь $S = 2R^2 \sin\varphi$. Полученное выражение принимает наибольшее значение, если $\sin\varphi = 1$, то есть $\varphi = 90°$. Таким образом, искомый прямоугольник является квадратом со стороной $R\sqrt{2}$.

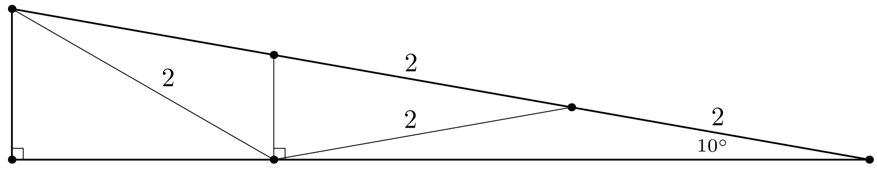
4) Пусть диагональ прямоугольника образует со стороной a угол α. Тогда $a = 2R\cos\alpha$, $b = 2R\sin\alpha$, значит, $S = 4R^2 \sin\alpha\cos\alpha = 2R^2 \sin 2\alpha$. Полученное выражение принимает наибольшее значение, если $\sin 2\alpha = 1$, то есть $\alpha = 45°$. Таким образом, искомый прямоугольник является квадратом со стороной $R\sqrt{2}$.

Критерии проверки.

Указаны все ошибки, недочеты и пробелы и любой верный алгоритм их исправления — 6 баллов
За каждый приведенный способ решения — по 2 балла (но не больше четырех)

8. (*Использован №4.353 из сборника задач по математике для поступающих во втузы. / Под ред. М.И. Сканави. Учебное пособие. 6-е, переработанное изд. — М.: Высшая школа, 1992. Предложил А. Хачатурян*)

Учитель решил рассказать школьникам геометрическое доказательство известного тригонометрического тождества $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4$. Для этого он сделал на доске чертеж (см. рисунок).



Попробуйте воспроизвести его доказательство. Приведите также тригонометрическое доказательство. В чем Вы видите достоинства каждого из способов?

Комментарий. 1) Введем обозначения так, как показано на рис. 8. Так как треугольники ADF и DFB — равнобедренные, то $\angle DBF = \angle BDF = 20°$. Тогда $\angle FBC = \angle ABC - \angle DBF = 80° - 20° = 60°$, а $\angle BFC = 30°$. Из прямоугольного треугольника FBC получим, что $BC = \frac{1}{2}BF = 1$, тогда $CF = \sqrt{3}$. Таким образом, $AB = \frac{BC}{\sin 10°} = \frac{1}{\sin 10°}$.

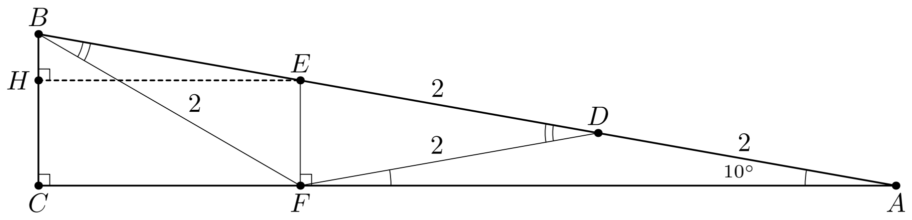


Рис. 8

В прямоугольной трапеции $BEFC$ проведем высоту EH, тогда $EH = CF = \sqrt{3}$, $\angle BEH = 10°$, значит, $BE = \dfrac{EH}{\cos 10°}$. Так как $AB - BE = AE$, то $\dfrac{1}{\sin 10°} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4$, что и требовалось.

2) Тригонометрическое доказательство:

$$\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = \frac{\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10° \cos 10°} = \frac{2\,(\sin 30° \cos 10° - \cos 30° \sin 10°)}{0,5 \sin 20°} = \frac{2\sin 20°}{0,5\sin 20°} = 4.$$

На наш взгляд, геометрический способ доказательства довольно изящен, доступен школьникам 8 класса и является хорошим упражнением по теме «Решение прямоугольных треугольников». Но придумать его, особенно без чертежа-подсказки, довольно трудно. Тригонометрический способ доказательства найти сравнительно просто, он короче, и использует только тригонометрические формулы сложения и двойного аргумента, а также хорошо иллюстрирует преобразования, связанные с введением дополнительного угла.

Отметим также, что геометрический подход позволяет придумывать некоторые тригонометрические тождества с конкретными углами. Например, используя тот же чертеж, из равнобедренного треугольника BFD получим, что $DB = 4\cos 20°$. Тогда $AB = AD + DB = 2(1 + 2\cos 20°)$. С другой стороны, как показано выше, $AB = \dfrac{1}{\sin 10°}$. Отсюда можно получить такое соотношение: $\sin 10°\ (1 + 2\cos 20°) = \dfrac{1}{2}$.

Кроме того, из приведенного геометрического решения видно, что $\sin 10° = \sin\dfrac{\pi}{18} \approx \dfrac{1}{6}$ (*с хорошей точностью*), *то есть при малых углах синус почти равен углу* (*как и должно быть*). *В тригонометрическом решении, доказывая, что разность равна* 4, *мы ничего не узнаем про значения уменьшаемого и вычитаемого. А из геометрического решения видно, что из числа, близкого к шести, вычитается число, близкое к двум, и получается ровно* 4.

Критерии проверки

Приведены верные доказательства: «*геометрическое*» — 6 *баллов*; «*тригонометрическое*» — 2 *балла*
Если в тригонометрическом доказательстве выкладки приведены верно, но нарушена логика, то за него — 1 *балл*
Приведены разумные соображения о достоинствах способов — еще 1–2 *балла*

В заданиях №9 и №10 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в каждом из «решений школьников»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так, и найдите все ошибки в каждом «решении». Если неверны только «решения», то укажите все ошибки в каждом «решении» и приведите верное решение (если оно отсутствует).

9. (*Использована задача №6* (*главы* IX) *книги* «*Комбинаторика*» *Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. — М.: МЦНМО*, 2006. *Предложила Е. Горская*)

В самостоятельной работе были предложены такие задачи:

I вариант. Сколькими способами можно сделать браслет из трех одинаковых изумрудов, двух одинаковых рубинов и одного сапфира? (В браслет входят все 6 камней).

II вариант. Сколькими способами можно сделать браслет из трех одинаковых изумрудов, трех одинаковых рубинов и одного сапфира? (В браслет входят все 7 камней).

(*В обоих вариантах браслеты считаются одинаковыми, если один из них может быть получен из другого поворотом или переворотом.*)

Коля, сидевший на первом варианте, предложил такое решение:

«Ответ»: 5.

«Решение». Предположим, что мы выкладываем камни в ряд, и все камни различны. Тогда существует 6! перестановок. Поскольку браслеты, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми, то нужно это число разделить на 6 (каждой перестановке соответствует шесть браслетов). Кроме того, при таком подсчете мы не различали браслеты, которые получаются друг из друга переворотом, то есть на самом деле браслетов еще вдвое меньше: $\dfrac{5!}{2}$. Этот подсчет мы производили исходя из того, что все камни различные, следовательно, полученное число надо разделить на количество перестановок одинаковых камней. Таким образом, искомое количество равно $\dfrac{5!}{2 \cdot 2! \cdot 3!} = 5$.

Вася, сидевший на втором варианте, списал Колино решение, изменив числа:

«Ответ»: 10.

«Решение». Предположим, что мы выкладываем камни в ряд, и все камни различны. Тогда существует 7! перестановок. Поскольку браслеты, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми, то нужно это число разделить на 7 (каждой перестановке соответствует семь браслетов). Кроме того, при таком подсчете мы не различали браслеты, которые получаются друг из друга переворотом, то есть на самом деле браслетов еще вдвое меньше: $\frac{6!}{2}$. Этот подсчет мы производили исходя из того, что все камни различные, следовательно, полученное число надо разделить на количество перестановок одинаковых камней. Таким образом, искомое количество равно $\frac{6!}{2\cdot 3!\cdot 3!} = 10$.

Комментарий. Условия обеих задач корректны. Решение обоих школьников содержит ошибку. При этом ответ, полученный Колей неверен, а ответ, полученный Васей, оказался верным. Проверить ошибочность ответа Коли можно непосредственным перебором. На рис. 9а изображены все различные браслеты, которые можно сделать из трех одинаковых изумрудов, двух одинаковых рубинов и одного сапфира. Таких браслетов — 6.

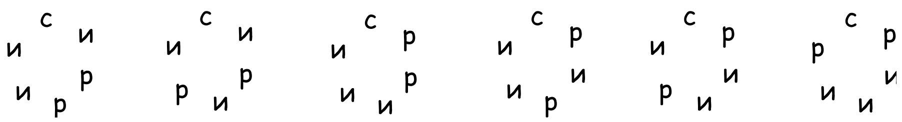


Рис. 9а

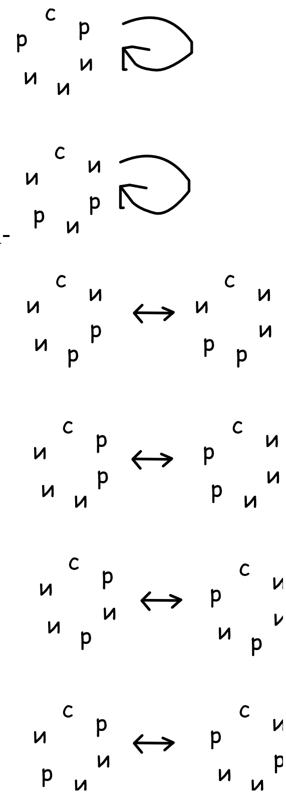


Рис. 9б

Приведем верное решение, по ходу которого станет понятна ошибка Коли и то, почему в решении Васи она не повлияла на ответ. Предположим, что все камни различны и браслет прибит к столу гвоздями. Тогда существует 6! перестановок, то есть 6! различных браслетов. Этот подсчет произведен, исходя из того, что все камни — различны, следовательно, это число надо разделить на количество перестановок одинаковых камней: $\frac{6!}{2!\cdot 3!} = 60$.

Поскольку браслеты, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми, то полученное число надо разделить на 6 (каждой перестановке соответствует 7 браслетов), тогда получим 10 браслетов.

Осталось учесть перевороты. К ответу Коли приводит такое рассуждение: «браслеты, которые мы уже учли, делятся на пары совпадающих при перевороте, поэтому нужно 10 разделить на 2». Но это неверно, поскольку среди браслетов есть те, которые при перевороте переходят сами в себя!

На рис. 9б изображены 10 браслетов, из которых нам надо выкинуть лишние — все они, кроме симметричных, разбиваются на пары, совпадающие при перевороте. Поэтому верным будет такое рассуждение: если среди десяти браслетов есть x симметричных и $(10-x)$ — несимметричных, то количество несимметричных браслетов надо разделить на 2 и сложить с количеством симметричных. Таким образом, после учета переворотов, получится $x + \frac{10-x}{2} = 5 + \frac{x}{2}$ браслетов. Так как в данном случае $x = 2$, то ответ в задаче: 6 браслетов.

В задаче II варианта браслет делается из семи камней, то есть нет браслетов, симметричных самим себе. Поэтому, в Васином решении получился верный ответ. Однако считать Васино решение верным мешает отсутствие пояснений о том, что симметричных браслетов в этом случае нет (то есть, отсутствие обоснования деления пополам).

Описанная ситуация возникла из-за того, что задачи, предложенные для двух вариантов, различаются по сложности.

Критерии проверки.

Верно указаны ошибки в обоих решениях, объяснено, почему при этом Вася получил верный ответ и приведено верное решение задачи Коли — 10 *баллов*

Верно указана ошибка Коли и приведено верное решение этой задачи, а о пробеле в решении Васи ничего не сказано — 8–9 *баллов*

Анализ ошибок отсутствует, но приведены верные переборные решения задач — 4–5 *баллов*

Заметим, что текст условия содержал опечатку. В решении Васи было написано «(*каждой перестановке соответствует шесть браслетов*)» *вместо* «(*каждой перестановке соответствует семь браслетов*)». *За ее обнаружение баллов не ставилось.*

10. (*Использован* №4.41 *из учебного пособия П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. Задачи с параметрами. Киев, РИА* «*Текст*», *МП* «*ОКО*», 1992. *Предложил А. Блинков*)

Для домашней работы школьникам была предложена задача: «При каких значениях параметров a и b значение выражения $\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$ не зависит от x?»

Решение Саши. Пусть $\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}=k$, где $k\in\mathbb{R}$, тогда $ax^2+bx+1=kx^2+kbx+ka$. Полученные трехчлены совпадают тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a=k, \\ b=kb, \\ 1=ka \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,\ b\in\mathbb{R}, \\ a=-1,\ b=0 \end{array}\right.$.

Ответ: при $a=1$, $b\in\mathbb{R}$ или $a=-1$, $b=0$.

Решение Паши. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$. Так как ее значение не должно зависеть от x, то $f(0)=f(1)$, то есть $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a+b+1}{1+b+a}$. Следовательно, $a=1$.

Подстановкой убеждаемся, что при $a=1$ и при любом значении b $f(x)=1$, что и требовалось.

Ответ: при $a=1$, $b\in\mathbb{R}$.

Решение Маши. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$. Значение функции $f(x)$ не зависит от x тогда и только тогда, когда $f(x)=C$.

Так как функция — дробно-рациональная, то она определена, если $x^2+bx+a\neq 0$ и дифференцируема на области определения: $f'(x)=\dfrac{(a-1)bx^2+2(a^2-1)x+(a-1)b}{(x^2+bx+a)^2}$.

Для того, чтобы $f(x)=C$, необходимо, чтобы $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)b=0, \\ a^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,\ b\in\mathbb{R}, \\ a=-1,\ b=0 \end{array}\right.$.

В первом случае функция определена для всех x, если $b^2-4>0 \Leftrightarrow |b|>2$. Во втором случае функция не определена при $x=\pm 1$.

Ответ: при $a=1$, $|b|>2$.

Комментарий. Условие задачи сформулировано не совсем корректно, его можно понимать двояко: 1) данное выражение принимает одно и то же значение на своей области определения; 2) данное выражение принимает одно и то же значение на множестве действительных чисел.

Решение Саши подразумевает 1), и с этой точки зрения оно верное.

Решение Маши подразумевает 2) и с этой точки зрения ход решения верен, но допущена ошибка в знаке неравенства в последнем абзаце: на самом деле, функция определена для всех x, если $b^2-4<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |b|<2$. Поэтому ее ответ неверен.

В решении Паши допущена ошибка при любом понимании условия. Если подразумевалось 1), то его способ решения не учитывает, что в точках $x=0$ или $x=1$ выражение может не иметь смысла (в данном случае пропущен случай, когда не существует $f(1)$). Если подразумевалось 2), то требовалось еще найти ограничения для значений параметра b. Поэтому неверен и полученный им ответ.

Критерии проверки.

Объяснено, почему условие задачи допускает два различных толкования, и указаны все ошибки в решениях — 10 баллов

Объяснено, почему условие задачи допускает два различных толкования, но проверка решений проведена только с «одной позиции» — 7–8 баллов

Не объяснено, почему условие задачи допускает два различных истолкования — не более 5 баллов

В этом случае проверка участником «решений школьников» должна была производиться исходя из того понимания условия, которое указал сам участник.

Вариант подготовили:

А.Д. Блинков, Е.Б. Гладкова, Е.С. Горская, А.В. Иванищук, И.Б. Писаренко, И.В. Раскина, А.В. Хачатурян, Д.Э. Шноль.