Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивалось в 10 баллов

I. Решите задачи.

1. Ветер (*С. Манвелов*). В кошельке лежали купюры в 1, 3, 5 и 10 тугриков, причем купюры по одному тугрику составляли половину общей суммы денег. В тот момент, когда я хотел купить газету за 16 тугриков, ветром унесло 5 купюр. Хватит ли оставшихся денег на покупку?

Ответ: да, хватит.

Решение. Найдем наименьшее количество денег, которое могло быть в кошельке. Поскольку имелись «крупные» купюры в 3, 5 и 10 тугриков, то наименьшее количество купюр по 1 тугрику равно 18, значит, наименьшее количество денег – 36 тугриков.

Если улетели три «крупные» купюры и две купюры по одному тугрику, то останется ровно 16 тугриков на газету. Если же в кошельке лежит больше «крупных» купюр, то больше будет и купюр по 1 тугрику, и при потере 5 купюр останется сумма, большая 16 тугриков.

Можно рассуждать еще проще: так как в кошельке были купюры 3, 5 и 10 тугриков (хотя бы по одной), то купюр по 1 тугрику не менее восемнадцати, то есть всего купюр – не менее, чем 21. Если улетели 5 купюр, то осталось не менее 16. Этого заведомо хватит на газету.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов.

2. Числа (*Фольклор*). Каждое из пяти чисел *a*, *b*, *c*, *d* и *e* равно либо 1, либо –1. Разрешается выбрать из них любые три числа и спросить, чему равно их произведение. Можно ли за три вопроса узнать число *a*?

Ответ: да, можно.

Решение. Первый способ. Тремя вопросами выясним значения произведений: *abc*, *abd* и *acd*. Перемножив их, получим: $a^3b^2c^2d^2 = a$ (независимо от значений *b*, *c* и *d*).

Отметим, что при таком способе решения число e могло быть любым.

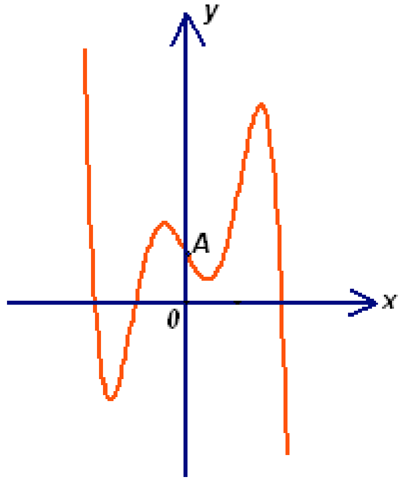
Второй способ. Тремя вопросами выясним значения произведений: *abc*, *bde* и *cde*. Перемножив их, получим: $ab^2c^2d^2e^2 = a$.

Существует и много других способов решения.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение (любым из способов) – 10 баллов.

3. График (*Д. Шноль*). На рисунке изображен график многочлена пятой степени $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Точка *A* – центр симметрии графика. Сравните с нулем коэффициенты многочлена. Ответ обоснуйте.



Ответ: $a_5 < 0$, $a_4 = a_2 = 0$, $a_3 > 0$, $a_1 < 0$, $a_0 > 0$.

Решение. 1) Так как *A*(0, a_0), то $a_0 > 0$.

2) Так как при $x \to +\infty$ $P(x) \to -\infty$, то $a_5 < 0$.

3) В окрестности точки $x_0 = 0$ функция убывает и касательная к графику в точке x = 0 - не горизонтальная, значит, $P'(0) = a_1 < 0$.

4) Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) - a_0$. Его график симметричен относительно начала координат, следовательно, *Q*(*x*) – нечетная функция. Так как $Q(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$, то $a_4 = a_2 = 0$.

Таким образом, исходный многочлен имеет вид: $P(x) = a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x + a_0$

5) Предположим, что $a_3 \le 0$. Тогда, так как $a_5 < 0$ и $a_1 < 0$, то *P*(*x*) – убывающая функция (сумма убывающих). Следовательно, она не имеет точек экстремума, что противоречит графику. Значит, $a_3 > 0$.

Рассуждение в пункте 5) можно провести и по-другому: так как функция P(x) имеет четыре точки экстремума, то ее производная $P'(x)=5a_5x^4+3a_3x^2+a_1$ *должна иметь четыре нуля. Следовательно, уравнение* $5a_5y^2+3a_3y+a_1=0$ *должно иметь два положительных корня. Зная, что* a_5 *< 0, по теореме Виета получим:* a_3 *> 0.*

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов (по пунктам: 1) – 1 балл; 2) – 1 балл; 3) – 2 балла; 4) – 3 балла; 5) – 3 балла) .

Если без обоснования использовано, что в точке А происходит перегиб графика – вычитается 1 балл.

4. Треугольник (*Фольклор*). Найдите углы треугольника, если длины всех его высот – натуральные числа, а радиус вписанной окружности равен 1.

Ответ: три угла по 60°.

Решение. Пусть a, b и c – длины сторон треугольника; h_a, h_b и h_c – длины соответствующих высот; p и S – его полупериметр и площадь, r – радиус вписанной окружности.

Любая высота треугольника больше, чем диаметр вписанной окружности, поэтому, если r = 1, то длина каждой высоты больше двух. Так как длины высот – натуральные числа, то длина каждой высоты не меньше трех. Покажем, что $h_a = h_b = h_c = 3$, то есть докажем, что искомый треугольник – равносторонний.

Первый способ. Пусть это не так, и его наибольшая сторона, например, a. Тогда $3a > 2p = 2pr = 2S = ah_a$. Следовательно, $h_a < 3$ – противоречие.

Второй способ. Воспользуемся тем, что $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=pr$. Пусть, например, $h_c > 3$, тогда $2S \ge 3a$, $2S \ge 3b$ и $2S > 3c$. Следовательно, $r=\frac{6S}{6p}>\frac{3a+3b+3c}{3(a+b+c)}=1$, что противоречит условию задачи.

Третий способ. Воспользуемся равенством $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ (*следует из формул площади треугольника, приведенных выше*). Если длина хотя бы одной высоты больше трех (а длины остальных – не меньше трех), то значение левой части меньше 1, а значение правой равно 1 – противоречие.

Равенство высот можно доказать и не используя никаких формул. Пусть длина какой-то из высот больше трех. Будем «двигать» вершину треугольника, из которой она проведена, по этой высоте, зафиксировав две остальные вершины. Выбранная высота при этом будет уменьшаться, следовательно, будет уменьшатся и радиус вписанной окружности (если один треугольник лежит внутри другого, то радиус вписанной окружности у первого треугольника меньше). «Движение» будем продолжать до тех пор, пока длина высоты не станет равной трем. Аналогичную процедуру можно поочередно проделать и с остальными высотами (если их длина больше трех). В итоге получим равносторонний треугольник, у которого r = 1. Следовательно, у исходного треугольника r > 1 – противоречие.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение (любым из способов) – 10 баллов.

Верное решение, содержащее мелкие пробелы или неточности – 8-9 баллов.

Решение, в целом, имеется, но в нем есть ссылки на верные, но неочевидные геометрические утверждения, которые не доказаны – 5-6 баллов.

Приведен только верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию – 1 балл.

5. Последовательность (*Фольклор*). Бесконечная последовательность $f(n)$ (n = 1, 2, ...), состоящая из натуральных чисел, такова, что $f(f(n)) = f(n + 1) + f(n)$ для всех натуральных n. Докажите, что все члены этой последовательности различны.

Решение. Предположим, что существуют натуральные числа m и k ($k > m$), для которых $f(m) = f(k)$. Тогда выполняется равенство $f(f(m)) = f(f(k))$. Подставим в равенство $f(f(n)) = f(n$

+ 1) + $f(n)$ числа m и k. Получим: $f(f(m)) = f(m + 1) + f(m)$ и $f(f(k)) = f(k + 1) + f(k)$. Следовательно, $f(m + 1) = f(k + 1)$.

Рассуждая аналогично, можно последовательно получить равенства $f(m + 2) = f(k + 2)$, $f(m + 3) = f(k + 3)$, ... Таким образом, для любого целого неотрицательного p будет выполняться равенство $f(m + p) = f(k + p)$. Введя обозначения $p_0 = k - m$ и $l = m + p$, получим, что $f(l) = f(l + p_0)$ для всех натуральных $l \geq m$, то есть последовательность $f(n)$ будет периодической, начиная с $n = m$.

Периодическая последовательность имеет конечное множество значений. Тогда среди них есть наибольшее, то есть существует такое натуральное число n_0, что $f(n_0) \geq f(n)$ для всех натуральных n. Но при $n = n_0$ равенство, заданное в условии, выполняться не может, поскольку $f(f(n_0)) \leq f(n_0)$, а $f(n_0 + 1) + f(n_0) > f(n_0)$ (так как $f(n_0 + 1)$ – натуральное число). Получили противоречие.

Противоречие в заключительной части доказательства можно получить иначе. Из того, что, начиная с некоторого номера, последовательность $f(n)$ периодична следует, что она ограничена. Вместе с тем, $f(f(n)) = f(n + 1) + f(n) > f(n)$, значит, последовательность $f(n)$, $f(f(n))$,..., $f(f...(f(n))...)$ (являющаяся подпоследовательностью данной) строго возрастает и не ограничена (так как состоит из натуральных чисел).

Отметим, что последовательности с указанным в условии свойством существуют, например, $f(n) = 2n + 2$.

Критерии проверки.

Полное обоснованное решение – 10 баллов.

Рассуждая «от противного», доказано только, что данная последовательность, начиная с некоторого момента, периодична – 3 балла.

Рассуждая «от противного», доказано только, что множество значений *последовательности конечно, либо из условия задачи «напрямую» получена только бесконечность множества значений последовательности – 3 балла.*

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. В этом случае проведите исследование данных в условии, показывающее, можно ли их изменить так, чтобы условие стало корректным. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. Сливы (*Использована задача Т. Караваевой из XXXIV турнира имени М.В. Ломоносова. Предложили Г. Мерзон и И. Ященко*). «Задача». Один торговец продает сливы по 150 рублей за килограмм, а другой – по 100 рублей. Но у первого косточка составляет треть массы каждой сливы, а у второго – половину. Чьи сливы выгоднее покупать?

«Ответ»: второго.

«Решение». У первого торговца мякоть составляет 2/3 массы, значит, 2/3 килограмма мякоти у него стоит 100 рублей, а 1 кг мякоти – 150 р. У второго торговца мякоть составляет половину массы, поэтому ее стоимость – 50 р за полкило, а 1 кг мякоти стоит 100 р. Таким образом, у второго покупать выгоднее.

Комментарий. Условие задачи корректно, «ответ» верный, но «решение» в корне неверно. Из верного утверждения «У первого торговца мякоть составляет 2/3 массы» вовсе не следует, что 2/3 килограмма мякоти у него стоит 100 рублей. На самом деле первый торговец берет 100 рублей не за 2/3 килограмма мякоти слив, а за 2/3 килограмма слив вместе с косточками. А 150 рублей он, как и сказано в условии, берет за 1 кг слив, а не за 1 кг мякоти. Аналогично, второй торговец берет 50 рублей за полкило слив (а не только мякоти), а 100 рублей – за 1 кг слив. Автор приведенного «решения» путает мякоть слив и целые сливы и приходит к абсурдному выводу: цена мякоти слив у него не отличается от указанной в условии цены слив с косточками (100 р).

К сожалению, многие участники турнира Ломоносова написали «решение», аналогичное приведенному выше, а некоторые проверяющие его засчитывали!.

Вот авторское решение:

Сравним цену мякоти слив. Первый торговец продает 1 – 1/3 = 2/3 килограмма мякоти за 150 рублей, то есть цена 1 кг мякоти у него составляет 150 : 2/3 = 225 (р). А у второго торговца мякоть стоит 100 рублей за полкило, то есть 200 рублей за кг. Таким образом, килограмм мякоти у второго торговца дешевле, поэтому покупать сливы выгоднее у него.

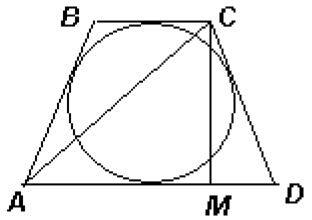
Можно рассуждать и по другому: на 300 рублей у первого торговца будет куплено 2 кг слив, из которых мякоть составит 4/3 кг, а у второго будет куплено 3 кг слив, причем мякоть составит 1,5 кг. Таким образом, покупать сливы у второго выгоднее.

Критерии проверки.

Верно указана конкретная ошибка в «решении» – 5 баллов.

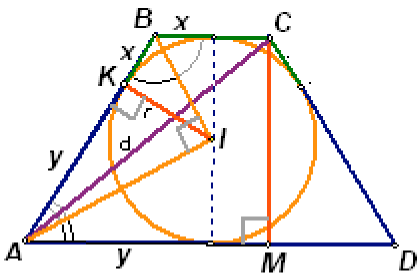
Приведено верное решение – 5 баллов.

7. Трапеция (*вариант диагностической работы ЕГЭ-11, 2007/08 уч. г., задание В11*). «Задача». В равнобокую трапецию, длина диагонали которой равна 2,5, вписан круг площади π. Найдите площадь трапеции.



«Ответ»: 3.

«Решение». Пусть *ABCD* – данная трапеция (см. рис.). Так как радиус круга равен 1, то высота *CM* трапеции равна 2. Из треугольника *CAM* получим, что *AM* = 1,5. Так как трапеция равнобокая, то отрезок *AM* равен средней линии трапеции. Следовательно, $S = AM \cdot CM$ = 3.



Комментарий. Условие задачи некорректно, так как рассуждения, приведенные в «решении» – верные, а «ответ» получился бессмысленный – площадь трапеции не может быть меньше, чем площадь вписанного в нее круга. Противоречие можно заметить и на предыдущем шаге: полученное значение длины *AM* больше *CM*, то есть диаметр вписанного круга больше средней линии трапеции, что невозможно (*либо, учитывая, что CD = AM, заметим: в треугольнике CMD катет больше гипотенузы, что также невозможно*)!

Проведем исследование данных задачи и покажем, что как их можно изменить, чтобы условие задачи стало корректным. Для этого достаточно найти соотношение между диагональю равнобокой трапеции и радиусом вписанного в нее круга (площадь круга однозначно определяет его радиус). Пусть диагональ равна *d*, радиус – *r*, а длины оснований *BC* и *AD* равны 2*x* и 2*y* соответственно (см. рис.).

В приведенном «решении» верно указано, что отрезок *AM* равен средней линии трапеция, значит, $x + y = \sqrt{d^2 - 4r^2}$ (*). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Для того, чтобы условие задачи было корректным, Н. и Д., чтобы средняя линия трапеции была больше, чем диаметр вписанного круга, то есть *x* + *y* > 2*r*. Учитывая равенство (*), получим: $\sqrt{d^2 - 4r^2} > 2r$, значит, $d^2 - 4r^2 > 4r^2$, то есть $d > 2r\sqrt{2}$.

Второй способ. Заметим, что $\angle AIB = 90°$ (*I* – центр вписанной окружности), а точка *K* касания вписанной окружности со стороной *AB* делит эту сторону на отрезки *BK* = *x* и *AK* = *y* (равенство отрезков касательных, проведенных из одной точки). Тогда, из прямоугольного треугольника *AIB*: $r^2 = xy$. Таким образом, *x* и *y* – корни квадратного уравнения $t^2 - \sqrt{d^2 - 4r^2} \cdot t + r^2 = 0$. Для корректности условия задачи Н. и Д., чтобы это уравнение имело два корня, значит, дискриминант должен быть положительным. Следовательно, $d^2 - 8r^2 > 0$, то есть $d > 2r\sqrt{2}$.

В нашем случае полученное условие не выполняется, так как 2,5 < $2\sqrt{2}$.

Отметим, что исследование можно также провести, рассматривая треугольник CMD и используя в нем либо теорему Пифагора, либо тригонометрические функции.

Критерии проверки.

Объяснено, почему некорректно «условие» – 3 балла.

Проведено полное исследование параметров в условии – 7 баллов.

Приведен только пример возможных числовых данных и показано, что в этом случае условие становится корректным – 3 балла.

К сожалению, практически все участники конкурса, проводившие исследование, ограничились тем, что нашли соотношение между данными в условии, которое является необходимым для того, чтобы задача стала корректной, не проверяя (и даже не упоминая) об их достаточности. Однако, если это соотношение найдено верно, то его достаточность очевидна, поэтому жюри решило не снижать оценку в этих случаях.

8. Прямоугольник (*Предложил В. Гуровиц*). *Вы – член жюри устной олимпиады, и школьник рассказывает Вам решение задачи:* «Сколькими способами можно нарисовать прямоугольник по линиям сетки на клетчатом листе бумаги размером $m\times n$?»

«Решение». Каждый прямоугольник задается однозначно своей верхней левой и правой нижней вершинами. Выберем местоположение одной вершины – это можно сделать $(m + 1)(n + 1)$ способами – таково число узлов решетки на листе размером $m\times n$. Второй узел не должен лежать с первым в одной строке и в одном столбце (а также не должен с ним совпадать). Таким образом, он может лежать в любой из n оставшихся строк и в любом из m оставшихся столбцов, то есть может быть выбран mn способами. Итого по правилу произведения существует $(m + 1)(n + 1)mn$ способов выбрать две вершины прямоугольника. Но при этом мы посчитали каждый прямоугольник два раза: выбирая сначала верхний левый, а затем нижний правый угол, и наоборот, поэтому полученное произведение надо разделить на 2. Ответ: $\dfrac{mn(m+1)(n+1)}{2}$.

Вы понимаете, что в его «решении» есть ошибки.

А) Придумайте аргумент, который сразу убедит школьника, что его «решение» неверное, не указывая, где именно он ошибся.

Б) Укажите все ошибки в приведенном «решении».

В) Приведите верное решение.

Комментарий. А) Можно предложить школьнику применить полученную им общую формулу для листа настолько малого размера, что количество прямоугольников легко найти непосредственным перечислением.

Например, на листе бумаги размером 2×2 можно нарисовать четыре квадрата 1×1, четыре прямоугольника 1×2 и один квадрат 2×2. Итого: 9 прямоугольников. А по его формуле получается ответ 18.

Еще проще: на листе размером 1×1 – всего один прямоугольник, а по формуле их должно быть два!

Б) В «решении» верно подсчитано количество способов выбрать две противоположные вершины прямоугольника. Но верхняя вершина может оказаться не левее, а правее нижней. В этом случае не существует прямоугольника, для которого одна из выбранных вершин – верхняя левая, а другая – правая нижняя.

В) Ответ: $\dfrac{mn(m+1)(n+1)}{4}$.

Первый способ. Исправим приведенное «решение». Для этого первое предложение заменим на другое: «Каждый прямоугольник однозначно задается двумя противоположными вершинами: либо верхней левой и нижней правой, либо верхней правой и нижней левой». Далее, как и в приведенном «решении», получим, что существует $(m + 1)(n + 1)mn$ способов выбрать две противоположные вершины прямоугольника. Но при этом каждый прямоугольник учтен четыре раза, так как любая из четырех вершин могла быть выбрана в качестве первой. Поэтому полученное произведение надо разделить на 4.

Второй способ. Каждый прямоугольник однозначно задается своими проекциями на перпендикулярные стороны листа. А каждая проекция (отрезок), в свою очередь, однозначно задается указанием двух концов. На стороне длины n имеется $n + 1$ узел сетки. Выбрать из них два узла можно $C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ способами. Аналогично, на стороне длины *m* выбрать два узла можно $C_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}$ способами. По правилу произведения выбрать обе проекции можно $\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$ способами, значит, столько же будет и прямоугольников.

Критерии проверки.

А) Приведен разумный аргумент – 4 балла.

Б) Верно указана допущенная ошибка в «решении» – 3 балла.

Дополнительно указана «ошибка», которой, на самом деле, нет – 2 балла.

В) Приведено верное решение – 3 балла.

9. Теорема Виета (*Предложил Д. Шноль*). *Многие ученики, хорошо усвоив формулу корней квадратного уравнения, считают теорему Виета несущественным «довеском» к теме и не любят ею пользоваться. Приведите 3 – 4 примера задач, которые бы Вы использовали на уроке, чтобы убедить учеников, что теорема Виета – мощный инструмент в опытных руках и во многих случаях без нее трудно обойтись.*

Комментарий. Можно выделить основные виды применения теоремы Виета.

I. Если известен один из корней квадратного уравнения, то можно найти другой корень. В этих случаях применение теоремы Виета очень эффективно, так как задача становится, как правило, «одношаговой».

Примеры. а) Уравнение $1941x^2 + 71x = 2012$ имеет корень 1, следовательно, другой корень равен $-\frac{2012}{1941}$. б) *Чуть сложнее*: уравнение $4x^2 – 3x + 9 = 4\cdot3{,}7^2 – 3(3{,}7 – 3)$ имеет корень 3,7, значит, другой корень равен 0,75 – 3,7 = –2,95. в) *Шутка*. Найдите сумму и произведение корней уравнения $x + \frac{1}{x} = 2012$. Это уравнение сводится к квадратному, следовательно, корней не более двух. Очевидно, что если x – корень уравнения, то $\frac{1}{x}$ – также его корень. Сумма корней уже записана, а произведение равно 1.

Здесь же отметим, что с помощью теоремы Виета доказывается формула для разложения квадратного трехчлена на множители.

II. Применение теоремы Виета необходимо для решения ряда задач с параметром (1), а также в тех случаях, когда требуется найти значения симметрических функций от корней квадратного уравнения (2).

Примеры. (1): а) Существует ли значение *а*, при котором уравнение $ax^2 + 2(a + 1)x + 2a = 0$ имеет корни разных знаков? б) Найдите все значения *а*, при которых уравнение $ax^2 – 2x + 2a^2 – 4 = 0$ имеет только целые корни.

(2): в) Корни уравнения $3x^2 + 8x + 1 = 0$ равны x_1 и x_2. Найдите: $x_1^2 + x_2^2$; $x_1x_2^4 + x_1^4x_2$; $\frac{x_1}{x_2^3} + \frac{x_2}{x_1^3}$. г) Пусть *u* и *v* – корни квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Рационально или иррационально число $u^3 + u^2v + uv^2 + v^3$?

(1) и (2): д) При каких значениях *а* сумма квадратов корней уравнения $x^2 – (a – 2)x – (a + 3) = 0$ наименьшая?

III. Теорему Виета удобно использовать при решении симметрических систем уравнений и систем уравнений, сводящихся к ним (иррациональных, тригонометрических и пр.).

Например, система уравнений вида $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ с помощью теоремы Виета сводится к квадратному уравнению $t^2 - at + b = 0$. Более того, любая симметрическая (кососимметрическая) система уравнений сводится с помощью замены переменных к одной или нескольким системам данного вида. Это универсальный способ решения таких систем.

Примеры. а) Решите системы уравнений: $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{7}, \\ xy=-\dfrac{2}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2, \\ xy=2(x+y) \end{cases}$.

б) Уравнение $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$ сводится к системе $\begin{cases} a^4+b^4=705, \\ a+b=8 \end{cases}$

в) Уравнение $\sin x+\cos x=1$ сводится к системе $\begin{cases} a^2+b^2=1, \\ a+b=1 \end{cases}$

IV. Возможны также простые но весьма эффектные примеры типа:

а) Известно, что $a+b=c+d$, $a^2+b^2=c^2+d^2$. Докажите, что $a^n+b^n=c^n+d^n$.

Возможное рассуждение: a, b и c, d пары корней одного и того же квадратного уравнения (следует из теоремы Виета). Поэтому либо $a=c$ и $b=d$, либо $a=d$ и $b=c$, и т. д.

С помощью похожих рассуждений решаются, например, такие задачи:

б) Решите уравнение: $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}$

в) При каких значениях a, b, c и d выполнены равенства: $a+bcd=b+acd=c+abd=d+abc=2$?

Набросок решения: пусть $abcd=A$, тогда числа a, b и c, d корни квадратного уравнения $x^2-2x+A=0$ и среди них не более двух различных, и т. д. Тем самым существенно упрощается перебор.

Отметим, что идея перехода от системы уравнений к квадратному уравнению с помощью теоремы Виета использована при исследовании в задании 7.

Заметим также, что примеры составления квадратных уравнений по их корням вряд ли убедят школьников, так как им может быть не ясно, какую роль такие задачи играют.

Критерии проверки.

Приведены примеры, иллюстрирующие основные идеи пунктов I, II и III – по 3 балла (за каждый пункт).

Приведены примеры с более сложной идеей (пункт IV) – еще 1 балл.

10. Экзамен (*Предложил Д. Шноль*). *Вашим ученикам предстоит на экзамене решить задачу: «*При каких значениях параметра *a* уравнение $(3a+9)\sin^2 x - a\sin x + \dfrac{1}{3} = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[0; \dfrac{5\pi}{6}]$?».

Вы хотите подготовить учеников к экзамену, не разбирая полностью аналогичных заданий. Приведите возможный список подготовительных задач. Укажите кратко роль каждой задачи: с какими идеями она знакомит и/или каких ошибок помогает избежать.

Комментарий. 1) Решение задачи, в конечном итоге, сведется к тому, что уравнение $\sin x = m$ должно иметь единственное решение на указанном промежутке.

Полезно дать, например, подготовительное задание типа: «При каких значениях *m* уравнение $\cos x = m$ имеет единственное решение на отрезке: а) $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$?». Можно также дать задачу, не связанную с тригонометрией, а требующую предварительного исследования функции и построения ее графика, например, «При каких значениях параметра *b* уравнение $x^3 - 3x = b$ имеет ровно один корень на отрезке [0; 2]?».

2) Идея замены переменной вряд ли требует подготовительной задачи, но, сделав замену и получив уравнение $(3a + 9)t^2 - at + \frac{1}{3} = 0$, школьники часто считают, что оно является квадратным, независимо от значений a. Однако, при $a = -3$ это уравнение будет линейным и такой случай, как правило, надо разбирать отдельно.

Полезно дать, например, подготовительное задание типа: «При каких значениях параметра a уравнение $(a - 2)y^2 + ay + a = 0$ имеет единственное решение?». Важно подобрать такое уравнение, чтобы потеря указанного случая повлияла на ответ.

3) Школьники часто не учитывают, что в данном случае квадратное уравнение является вспомогательным, поэтому надо рассмотреть не только случай, когда дискриминант равен нулю, но и случай, когда дискриминант положителен (вспомогательное квадратное уравнение может иметь два корня, а исходное – один корень).

Полезно дать, например, подготовительное задание типа: «При каких значениях параметра a уравнение $9^x - 2a{\cdot}3^x + (a^2 - 4) = 0$ имеет единственное решение?». В этом случае вспомогательное квадратное уравнение имеет два корня при любых значениях a, поэтому для решения задачи потребуется исследовать знаки этих корней.

4) При решении предложенной задачи потребуется исследовать расположение корней квадратного уравнения относительно промежутка $[0; \frac{1}{2})$ в зависимости от значений параметра (в случае, когда вспомогательное квадратное уравнение имеет два корня, один из них должен принадлежать этому промежутку, а другой – нет).

В таких случаях удобно использовать «функциональный язык». В частности, ровно один корень квадратного трехчлена $f(x)$ лежит внутри отрезка $[a; b]$, если значения $f(x)$ на концах этого отрезка имеют разные знаки, то есть, $f(a)\,f(b) < 0$.

Так как это условие не является необходимым, то случаи, когда на концах отрезка (или границах интервала) квадратный трехчлен равен нулю, а также случай, когда трехчлен имеет один корень, удобно рассмотреть отдельно (эти случаи могут содержать существенные особенности).

Вспомогательная задача (или несколько задач) должна включать в себя эти идеи, например, «При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + a + 3 = 0$ имеет единственное решение: а) на отрезке $[-4; 0]$; б) на промежутке $(-4; 0]$; в) на промежутке $[-4; 0)$?».

Отметим, что в предложенной задаче можно как раз не рассматривать отдельно случай, указанный в пункте 2)! Действительно, если $f(x)$ – линейная функция, то выполнение условия $f(a)\,f(b) < 0$ автоматически обеспечит попадание единственного корня уравнения внутрь отрезка $[a; b]$. Если же $f(x)$ становится линейной в каком-то из «особых случаев» (см. пункт 4), то и этот случай мы получим автоматически.

Тем не менее, вспомогательную задачу с этой идеей все равно дать полезно, поскольку встречается много задач с параметром, в которых этот момент существенен.

Заметим, что возможен и несколько другой подход к решению исходной задачи: сделать замену $\sin x = t$ и рассмотреть график функции $a(t)$. В этом случае система подготовительных задач будет иной.

Отдельно отметим, что жюри не считает рациональными способы решения исходной задачи, использующие иррациональные неравенства.

<u>Критерии проверки</u>.

Приведены содержательные подготовительные задачи (на различные идеи) и объяснены их роли: не менее трех задач – 10 баллов; две задачи – 6 баллов; одна задача – 3 балла.

Приведена только задача на замену переменных – 1 балл.