X Творческий конкурс учителей математики
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи.

1. Виноград. Смуглянка собрала целое число килограммов винограда и ровно четверть винограда отдала парню. Тот разложил его по килограммовым пакетам (получилось не менее одного), а остаток съел. Если бы парень получил треть винограда, то количество пакетов с виноградом осталось бы прежним. Сколько винограда собрала смуглянка?

Фольклор, предложили И.В Раскина и А.В. Хачатурян

Ответ: 5 кг.

Решение. Первый способ. Так как разница в доле парня $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{12}$ не увеличила количество килограммовых пакетов, то смуглянка собрала меньше, чем 12 кг. При этом, четверть собранного больше, чем 1 кг, значит, она собрала больше, чем 4 кг.

Заметим, что искомое количество килограммов не должно делиться на 4 (иначе парню нечего будет съедать) и не должно делиться на 3 (иначе, при делении на 4 целая часть частного будет меньше, чем при делении на 3). Таким образом, смуглянка могла собрать 5 кг, 7 кг, 10 кг или 11 кг. Проверкой получаем, что единственно возможный ответ – это 5.

Можно также не использовать соображения делимости, а проверить все целые числа от 5 до 11 (что более трудоемко).

Второй способ. Пусть смуглянка собрала x кг винограда, а парень разложил его по n пакетам, тогда из условия задачи следует, что должна выполняться система неравенств:

$\begin{cases} n < \frac{x}{4} < n+1, \\ n \le \frac{x}{3} < n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n < x < 4n+4, \\ 3n \le x < 3n+3 \end{cases}$. Так как $n > 0$, то $3n < 4n$ и $3n + 3 < 4n + 3$.

Следовательно, система равносильна двойному неравенству $4n < x < 3n + 3$. При n = 1 получим: $4 < x < 6$, то есть $x = 5$, а при $n \ge 2$ это неравенство не имеет целых решений.

Критерии проверки. *Полное обоснованное решение – 10 баллов*.

Приведено верное, в целом, рассуждение, в котором есть мелкие пробелы или неточности (не вполне обоснована делимость, строгость знаков неравенства, и т. п.) – 8 баллов.

Приведен верный ответ, проверено, что он удовлетворяет условию, но не доказано отсутствие других возможностей – 2 балла.

В решении не учтено, что остаток от деления искомого числа на 4 не равен 0 – 1 балл.

Приведен только верный ответ – 1 балл.

2. Шарики. В ящике лежат 111 шариков красного, синего, зелёного и белого цветов. Среди любых ста шариков обязательно найдутся 4 шарика различных цветов. Какое наименьшее количество шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 шарика различных цветов?

Фольклор, предложила О.Р. Горская

Ответ: 88.

Решение. Заметим, что количество шариков каждого цвета должно быть больше, чем 111 – 100 = 11, иначе найдется сотня шариков только трех цветов. Значит, количество шариков каждого цвета не меньше, чем 12, а любых двух цветов – не меньше, чем 24. С другой стороны, количество шариков любых двух цветов не может быть больше, чем 111 – 24 = 87 (должно быть хотя бы 24 шарика двух других цветов). Следовательно, если вынуть 88 шариков, то среди них обязательно найдутся 3 шарика различных цветов.

Если же вынуть меньше шариков, то они могут оказаться только двух цветов. Действительно, пусть в ящике по 12 красных, синих и зеленых шариков, а остальные 75 шариков белого цвета. Такой случай не противоречит условию: среди любых ста шариков найдутся шарики всех четырех цветов. Вытащив 12 красных шариков и все белые, мы получим 87 шариков двух цветов.

Критерии проверки. *Полное обоснованное решение – 10 баллов*.
Приведено верное, в целом, решение, но имеются мелкие недочеты в обоснованиях – 9 баллов.
Приведен верный ответ, объяснено, почему достаточно вынуть 88, но не объяснено, почему нельзя вынуть меньше – 7 баллов.
Приведен верный ответ, объяснено, почему вынуть меньше, чем 88 недостаточно, но не объяснено, почему хватит 88 – 4 балла.
Верный ответ получен только рассмотрением конкретного примера – 2 балла.
Верный ход решения, но допущены арифметические ошибки – 2 балла.
Приведен только верный ответ – 1 балл.

Жюри отмечает, что в решениях участников часто фигурировали выражения типа «в наихудшем случае», которые не были точно определены и не были никак обоснованы. Такие решения чаще всего оценивались в 4 балла.

3. Максимум. Известно, что $x^2 + xy + y^2 = x + y$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2$?

Фольклор, предложил П.В. Чулков

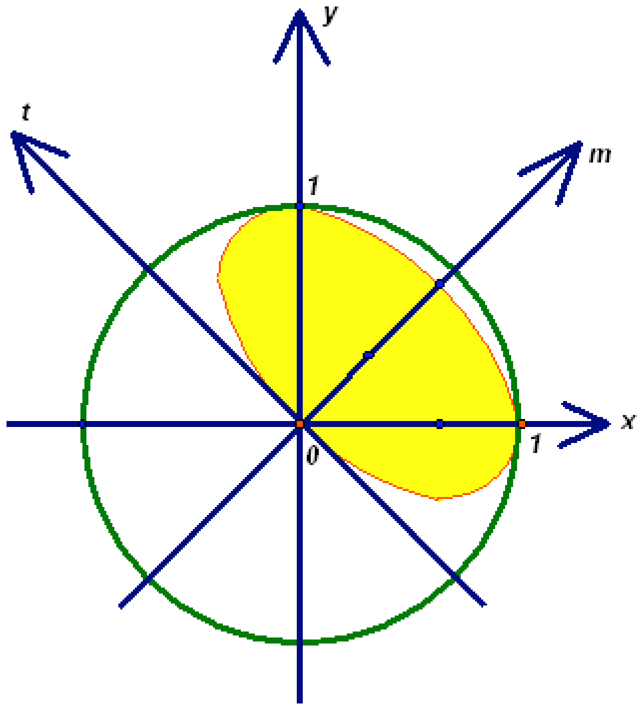
Ответ: 1.

Решение. При $x = 0$, $y = 1$ (или наоборот) равенство, заданное в условии, выполняется и $x^2 + y^2 = 1$. Докажем, что при всех значениях x и y, удовлетворяющих условию, выполняется неравенство $x^2 + y^2 \le 1$.

Первый способ («симметрическая замена»). Пусть $x + y = a$ и $xy = b$, тогда условие задачи запишется в виде $a^2 - b = a$, откуда $b = a^2 - a$. При этом $x^2 + y^2 = a^2 - 2b = a^2 - 2(a^2 - a) = -a^2 + 2a$

Наибольшее значение квадратичной функции $f(a) = -a^2 + 2a$ достигается при $a = 1$ и равно 1. Следовательно, $f(a) \le 1$, то есть $x^2 + y^2 \le 1$.

Второй способ («аффинная замена»). Пусть $x = m + t$, $y = m - t$. Тогда условие задачи запишется в виде: $(m + t)^2 + (m + t)(m - t) + (m - t)^2 = 2m \Leftrightarrow 3m^2 + t^2 = 2m$. При этом $x^2 + y^2 = 2(m^2 + t^2) = 2(2m - 2m^2) = 4m(1 - m)$. Наибольшее значение квадратичной функции $f(m) = 4m(1 - m)$ достигается при $m = 0,5$ и равно 1. Следовательно, $f(m) \le 1$, то есть $x^2 + y^2 \le 1$.



Приведенное решение внешне похоже на предыдущее, но по сути оно другое. Условие задачи задаёт на плоскости эллипс, оси которого составляют угол 45° с осями координат. Требуется найти наибольший радиус окружности с центром в начале координат, которая имеет с эллипсом хотя бы одну общую точку. Предложенная замена переменных – аффинное преобразование (композиция поворота на угол 45° и гомотетии с коэффициентом $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$), которое совмещает одну из осей эллипса с осью абсцисс. Центр окружности остаётся в начале координат, а уравнение эллипса упрощается (см. рис.).

Третий способ («тригонометрическая

замена»). Пусть $x^2 + y^2 = R^2$, где $R > 0$. Тогда существует такое φ, что $x = R\cos\varphi$ и $y = R\sin\varphi$. Условие задачи запишется в виде: $R^2 + R^2\sin\varphi\cos\varphi = R(\sin\varphi + \cos\varphi) \Leftrightarrow$ $R\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$.

Введя обозначение $\varphi+\frac{\pi}{4}=\alpha$, получим: $R\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)=\sqrt{2}\cdot\sin\alpha \Leftrightarrow R=\frac{2\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sin^2\alpha+1}$.

Тогда $R \le 1$, так как $\frac{2\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sin^2\alpha+1}\le 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\alpha\le 2\sin^2\alpha+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin\alpha-1\right)^2\ge 0$. Следовательно, $x^2 + y^2 \le 1$.

<u>Четвертый способ</u>. Запишем данное равенство в виде $x^2 + x(y - 1) + (y^2 - y) = 0$ и рассмотрим его как квадратное уравнение с переменной x. Для того, чтобы существовали значения x и y, удовлетворяющие исходному равенству, необходимо, чтобы это квадратное уравнение имело решения, то есть чтобы $D = (y - 1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 2y + 1 = -3(y + \frac{1}{3})(y - 1) \ge 0$. Таким образом, $-\frac{1}{3} \le y \le 1$.

Рассмотрев данное равенство как квадратное уравнение относительно y и проведя аналогичное рассуждение, получим, что $-\frac{1}{3} \le x \le 1$.

Заметим, что $x^2 + xy + y^2 = x + y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x + y - xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - (1 - x)(1 - y)$. Тогда, учитывая, что $x \le 1$ и $y \le 1$, получим, что $x^2 + y^2 \le 1$.

Возможно также «лобовое решение»: также рассмотреть данное равенство как квадратное уравнение относительно одной из переменных и, решив его, то есть выразив одну из них через другую, подставить полученный результат в выражение $x^2 + y^2$. Образовавшуюся таким образом функцию с одной переменной можно исследовать на наибольшее значение с помощью производной. Такое решение связано, однако, со значительными техническими трудностями.

<u>Критерии проверки</u>. *Полное обоснованное решение (любым из способов) – 10 баллов*.
Приведен верный ответ, доказана оценка, но не показано, что найденное значение достигается – 8 баллов.
Приведен верный ответ и показано только, что он достигается – 2 балла.
Приведен только верный ответ – 1 балл.

4. Функция. Существует ли такая функция f, отличная от постоянной, что для всех x, для которых $\cos x \ne 0$, выполняется равенство $f(tgx) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$?

Фольклор, предложили Д.В. Прокопенко и П.В. Чулков

<u>Ответ</u>: да, существует.

<u>Решение</u>. Рассмотрим функцию $f(t) = \{t^2\}$, тогда $f(tgx) = \{tg^2 x\}$, $f\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \left\{\frac{1}{\cos^2 x}\right\}$.

Эта функция удовлетворяет условию задачи, так как из равенства $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ следует, что $\{tg^2 x\} = \left\{\frac{1}{\cos^2 x}\right\}$.

Отметим, что «ключом» к решению может служить любая периодическая функция $g(z)$, периодом которой (не обязательно наименьшим) является число 1. Тогда $f(t) = g(t^2)$. В приведенном выше решении использована функция $g(z) = \{z\}$, но можно было использовать и другую, например, $g(z) = \sin(2\pi nz)$, где n – целое.

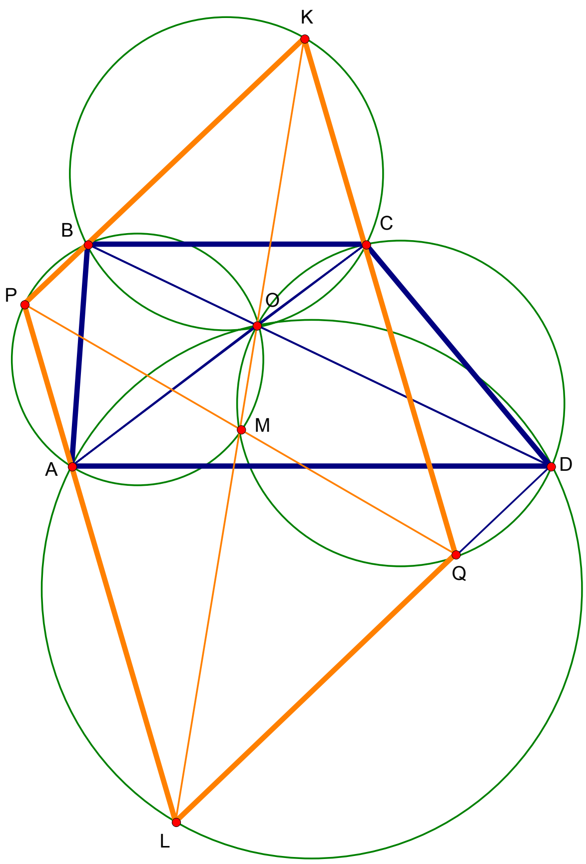
Кроме того, существует ряд примеров, где искомая функция задана в «кусочном» виде. Один из возможных примеров такого типа – использование функции Дирихле: $f(t)=\begin{cases} 0, \text{ если } t^2 \in Q \\ 1, \text{ если } t^2 \in R \setminus Q \end{cases}$.

<u>Критерии проверки</u>. *Полное обоснованное решение – 10 баллов.*
Приведен верный пример, но не объяснено, почему он годится – 8 баллов.
Приведен только ответ – 0 баллов.

5. Трапеция. Диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Описанные окружности треугольников *AOB* и *COD* второй раз пересеклись в точке *M*. Прямая *OM* пересекает окружности, описанные около треугольников *BOC* и *AOD*, в точках *K* и *L* соответственно. Докажите, что *M* – середина отрезка *KL*.

Фольклор, предложил А.Г. Мякишев

<u>Решение</u>. Из условия задачи следует, что основаниями трапеции являются отрезки *AD* и *BC*. Действительно, треугольники с общей вершиной *O*, прилегающие к основаниям трапеции, гомотетичны с центром О, значит, гомотетичны и их описанные окружности, то есть *O* – их единственная общая точка.



Проведем отрезки *BK*, *KC*, *AL* и *LD* (см. рис.). Используя свойства вписанных углов и параллельность *BC* и *AD*, получим цепочку равенств: $\angle BKO = \angle BCO = \angle OAD = \angle OLD$. Следовательно, *BK* || *LD*. Аналогично доказывается, что *KC* || *AL*.

Продолжим отрезок *LA* до пересечения с описанной окружностью треугольника *AOB* в точке *P*. Докажем, что точки *P*, *B* и *K* лежат на одной прямой. Для этого достаточно доказать, что *PB* || *LD*. По свойству вписанного четырехугольника $\angle AOB + \angle APB = 180°$ и $\angle AOD + \angle ALD = 180°$, значит, $\angle APB + \angle ALD = 180°$, следовательно, *PB* || *LD*.

Пусть *Q* – точка пересечения прямой *KC* и описанной окружности треугольника *BOD*. Докажем, что точка *Q* лежит на одной прямой *LD*. Для этого достаточно доказать, что *QD* || *BK*. А это следует из того, что $\angle CQD = \angle COD = \angle BKC$.

Таким образом, доказано, что четырехугольник *PKQL* – параллелограмм. Тогда утверждение задачи равносильно тому, что *M* – точка пересечения его диагоналей. Для этого осталось доказать, что точки *P*, *M* и *Q* лежат на одной прямой. Используем несколько раз свойство вписанных четырехугольников: $\angle OMQ = \angle OCK = \angle OBP$. А так как $\angle OBP + \angle OMP = 180°$, то и $\angle OMQ + \angle OMP = 180°$, что и требовалось.

Возможны также другие способы решения. В частности, один из них связан с многократным использованием теоремы синусов, другой – опирается на предварительно доказанную лемму: центры данных четырех окружностей являются вершинами параллелограмма.

<u>Критерии проверки</u>. *Полное обоснованное решение – 10 баллов.*

II. Методический блок.

В заданиях №6 – №9 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач» и «теорем», так и в «ответах», «решениях» и «доказательствах»). Если некорректно условие «задачи» («теоремы»), то объясните, почему это так и какие *ошибки допущены в «решении» («доказательстве»). Если неверно только «решение» («доказательство»), то укажите все ошибки и приведите верное решение (доказательство).*

6. Зазеркалье. «Задача». В Зазеркалье имеют хождение только монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет (не менее двух), а на сдачу получила на две монеты больше. Какова минимально возможная стоимость покупки?

«Ответ»: 10 гиней.

«Решение». Пример. Алиса отдала 2 монеты по 25 гиней, а получила на сдачу 2 монеты по 7 гиней и 2 монеты по 13 гиней.

Оценка. Заметим, что стоимость покупки не может быть меньше самой мелкой монеты. Кроме того, бессмысленно платить какую-либо монету и ее же получать в виде сдачи. Перебором остальных возможностей несложно убедиться, что если из суммы номиналов любых двух монет вычитать сумму номиналов любых четырех монет, то невозможно получить ни 7, ни 8, ни 9.

Л.Э. Медников и А.В. Шаповалов

(по материалам XVIII турнира математических боев имени А.П. Савина)

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «ответ» и «решение» неверны. Во-первых, если можно давать сдачу, то стоимость покупки может быть даже 1 гинея. Например, Алиса заплатила две монеты по 7 гиней и получила на сдачу монетой 13 гиней. Во-вторых, делая оценку, нельзя опираться на приведенный пример, то есть недостаточно рассмотреть случай, когда Алиса дала 2 монеты, а получила 4. Придется рассмотреть все случаи, соответствующие условию, что перебором сделать невозможно.

На самом деле, минимально возможная стоимость покупки – 4 гинеи.

Пример. $4 = 3 \cdot 13 - 5 \cdot 7$, то есть Алиса дала 3 монеты по 13 гиней, а получила сдачи – 5 монет по 7 гиней.

Приведем два возможных способа оценки.

Первый способ. Заметим, что номинал каждой монеты дает остаток 1 при делении на 6. Так как вычитается на два числа такого вида больше, чем прибавляется, то стоимость покупки должна при делении на 6 давать остаток 4.

Второй способ. Пусть стоимость покупки равна S. Тогда решение задачи сводится к поиску наименьшего натурального значения S, удовлетворяющего системе уравнений $\begin{cases} 7x + 13y + 25z = S, \\ x + y + z = -2 \end{cases}$ (где x, y и z – целые числа). Исключая, например, переменную z и преобразуя полученное уравнение, получим: $-6(2x + 3y) = S + 50$.

Левая часть этого уравнения кратна шести, значит, и $S + 50$ должно быть кратно шести. Поэтому значения S, равные 1, 2 или 3, не могут являться решениями.

Отметим, что последнее равенство также дает возможность подобрать пример для S = 4 и позволяет сделать вывод о том, что их бесконечно много.

Критерии проверки (*баллы за пункты 1) и 2) суммируются*).

1) Объяснены все ошибки в «ответе» и «решении» – 5 баллов.

Указано, что «ответ» неверен, приведен контрпример и объяснена одна из ошибок в «решении» – 3 балла.

Указано, что «ответ» неверен, приведен контрпример, но ошибки в «решении» не объяснены – 2 балла.

Указано, что «ответ» и / или «решение» неверны со ссылкой на отсутствие перебора – 1 балл.

Указано только, что «ответ» и / или «решение» неверны – 0 баллов.

2) Приведено верное решение – 5 баллов.

Приведена только верная оценка – 3 балла.

Приведены только верный ответ и пример – 2 балла (если они не оценены в части 1).*

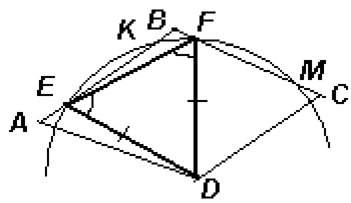
**если при этом сделана попытка оценки путем разбиения на несколько случаев, но разобраны не все случаи, то еще 1 балл.*

Приведен только верный ответ – 1 балл.

7. Ромб. «Задача». В ромбе $ABCD$ на сторонах AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $\angle DEF = \angle DFE$. Докажите, что $BE = BF$.

«Решение». Из данного равенства углов следует равенство отрезков DE и DF. Следовательно, равны треугольники DEA и DFC. Тогда $AE = CF$, откуда $BE = BF$.

Фольклор, предложил А.Д. Блинков



Комментарий. Утверждение «задачи» не верно. Действительно, рассмотрим ромб $ABCD$, в котором углы B и D – тупые. Так как основания высот ромба, проведенных, например, из вершины D, лежат на сторонах ромба, то найдется окружность с центром D, которая пересечет каждую из сторон AB и BC в двух точках (E, K и F, M соответственно, см. рис.). Тогда $\angle DEF = \angle DFE$ (углы при основании равнобедренного треугольника DEF), но $BE \neq BF$.

Отсюда понятен пробел в «решении»: утверждение, что треугольники DEA и DFC равны, ошибочно. Действительно, в этих треугольниках: $DA = DC$, $DE = DF$ и $\angle A = \angle C$. Согласно, так называемому, «четвертому признаку равенства треугольников» отсюда следует, что либо эти треугольники равны, либо $\angle DEA + \angle DFC = 180°$ (что и выполняется в данном случае).

Критерии проверки. *Указано, что утверждение «задачи» неверно, приведен обоснованный контрпример и объяснена ошибка в «решении» – 10 баллов*.

Указано, что утверждение «задачи» неверно, объяснена ошибка в «решении», но вместо контрпримера приведен лишь чертеж без обоснований – 7 баллов.

Указано, что утверждение «задачи» неверно, приведен контрпример, но не объяснено, где ошибка в «доказательстве» – 5 баллов.

Указано только, где в «решении» содержится необоснованный переход, но не объяснено, почему этот переход неверен – 2 балла.

Указано только, что утверждение «задачи» неверно – 1 балл.

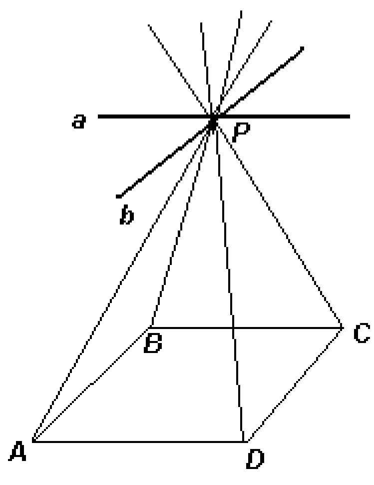
Указано только, что неверно «решение» – 0 баллов.

8. Многогранник. «Теорема». Плоскости граней выпуклого многогранника разбивают пространство на $2P + 3$ части, где P – количество его ребер.

«Доказательство». Одна из искомых частей пространства – внутри многогранника. Каждая из остальных частей имеет с многогранником либо общую грань, либо общее ребро, либо общую вершину. Наглядно это легко представить, рассмотрев куб или тетраэдр.

Таким образом, искомое количество частей равно $B + Г + P + 1$ (B и $Г$ – количество вершин и граней соответственно). По формуле Эйлера: $B + Г – P = 2$, поэтому $B + Г + P + 1 = 2P + 3$.

Предложили А.Д. Блинков и В.М. Гуровиц (по материалам задачи на открытии финала Всероссийской олимпиады по математике 2013 года)



Комментарий. Сформулированная «теорема» неверна. Действительно, рассмотрим четырехугольную пирамиду $PABCD$ (см. рис.). Продлим ее боковые ребра за вершину P. Продолжения ребер образуют четырехгранный угол, который является частью пространства, имеющую с пирамидой общую вершину P. Кроме того, рассмотрим прямые a и b пересечения плоскостей противолежащих боковых граней (см. рис.). Лучи этих прямых с началом в точке P вместе с каждой парой соседних продолжений ребер образуют трехгранные углы, который также являются частями пространства, имеющими с пирамидой общую вершину P. Значит, при подсчете общего количества частей эту вершину потребуется учесть еще 4 раза. Таким образом, искомое количество частей пространства равно 23 (а, согласно «теореме», их должно быть 19).

Понятно, что ссылка в «доказательстве» на куб или тетраэдр (для которых утверждение верно) неправомерна.

Существуют и другие примеры. Вспомогательной иллюстрацией допущенной ошибки может служить рассмотрение аналогичной ситуации на плоскости. Найдем количество частей, на которые разбивают плоскость прямые, содержащие стороны, для двух четырехугольников. Для квадрата – их 9 (внутренняя область, 4 примыкают к сторонам и 4 примыкают к вершинам, то есть аналогично тому, как сформулировано в «теореме»). Но для трапеции их уже 10 (дополнительная часть плоскости образована пересекающимися прямыми, содержащими боковые стороны). Это позволяет, в частности, построить аналогичный контрпример в пространстве: если рассмотреть четырехугольную усеченную пирамиду, то возникнет часть пространства, которая вообще не имеет с пирамидой общих точек.

Критерии проверки. *Указано, что «теорема» неверна, приведен контрпример и объяснена ошибка в «доказательстве» – 10 баллов.*
Указано, что «теорема» неверна, приведен возможный контрпример, для которого подсчитано количество частей, но не объяснено, где ошибка в «доказательстве» – 8 баллов.
Указано только, что «теорема» неверна – 1 балл.
Указано только, что неверно «доказательство» – 0 баллов.

9. Сумма площадей. «Задача». Диагональ квадрата площади *S* произвольным образом разбита на *n* частей. На каждой из этих частей как на диагонали построен новый квадрат. Докажите, что сумма площадей получившихся квадратов не меньше, чем $\frac{S}{n}$.

«Решение». Величина $\frac{S}{n}$ достигается, если разбить диагональ данного квадрата на равные части. Пусть наименьшее значение суммы площадей новых квадратов достигается при каком-то другом разбиении. Тогда в этом разбиении найдутся два соседних неравных отрезка с длинами *a* и *b*. Площади соответствующих квадратов будут равны $\frac{a^2}{2}$ и $\frac{b^2}{2}$. Передвинем точку, разделяющую эти отрезки, так, чтобы они стали равными, тогда получим два одинаковых квадрата площади $\frac{(a+b)^2}{8}$ каждый. Так как $\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}$ > 0, то при таком перемещении сумма площадей квадратов уменьшится. Таким образом, получено противоречие. Следовательно, $\frac{S}{n}$ – наименьшее значение искомой суммы.

Предложил А.Д. Блинков (использован материал IX турнира математических боев имени А.П. Савина)

Комментарий. Утверждение, сформулированное в условии «задачи», верно, однако ее «решение» содержит существенный пробел: не доказано, что наименьшее значение суммы площадей указанных квадратов на самом деле существует.

Отметим, что на подобной ошибке – отсутствии доказательства существования искомого объекта – основано большое число различных софизмов.

Приведем самый короткий и прозрачный из них:
«Число 1 является наибольшим натуральным числом».
«Доказательство». Пусть n – наибольшее натуральное число. Тогда $n^2 \le n$, *откуда* $n \le 1$. *Но любое натуральное число не меньше 1, поэтому n = 1. Таким образом, 1 – наибольшее натуральное число.*

В приведенном «доказательстве» ошибочна, очевидно, самая первая фраза, поскольку наибольшего натурального числа не существует.

Приведем два возможных способа исправить решение исходной задачи.

Первый способ. Пусть a – сторона данного квадрата, a_1, a_2, …, a_n – стороны новых квадратов. Тогда задача сводится к доказательству неравенства $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{S}{n}$.

Учитывая, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a$ и используя неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном, получим: $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{a}{n} \Leftrightarrow$

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{a^2}{n} = \frac{S}{n}$, что и требуется доказать.

Второй способ. Из условия следует, что диагональ данного квадрата равна $\sqrt{2S}$. Пусть не все построенные квадраты равны между собой. Тогда обязательно найдется квадрат с диагональю $c < \frac{\sqrt{2S}}{n}$ и квадрат с диагональю $d > \frac{\sqrt{2S}}{n}$. Заменим эти два квадрата на два новых квадрата с диагоналями $c + x = \frac{\sqrt{2S}}{n}$ и $d - x$, то есть так, чтобы сумма длин диагоналей не изменилась. При такой операции количество квадратов с диагональю $\frac{\sqrt{2S}}{n}$ увеличится, а сумма площадей построенных квадратов уменьшится.

Действительно, в этом случае разность суммарных площадей квадратов равна $\left(\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}\right)-\left(\frac{(c+x)^2}{2}+\frac{(d-x)^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-2cx-2x^2+2dx\right)=x\left(d-c-x\right)>0$, так как $c + x < d$.

Повторив указанную операцию несколько раз, мы получим конфигурацию из n равных квадратов, суммарная площадь которых равна $\frac{S}{n}$ – меньше, чем суммарная площадь исходных квадратов. Следовательно, сумма площадей построенных квадратов не меньше, чем $\frac{S}{n}$, что и требовалось доказать.

Этот способ решения использует метод доказательства неравенств, который называется «методом Штурма».

Критерии проверки (*баллы за пункты 1) и 2) суммируются*).

1) Верно указана ошибка в «решении» – 5 баллов.

2) Приведено любое верное решение – 5 баллов.

К сожалению, многие участники неверно поняли «доказательство», которое было дано в условии этого задания. Они сочли, что в нем предлагается многократной заменой двух соседних неравных отрезков двумя равными (с той же суммой длин) свести разбиение диагонали к равномерному, уменьшая при этом сумму квадратов и доведя её в итоге до $\frac{S}{n}$*. Действительно это сделать не получится и многие правильно об этом написали. Но, на самом деле, в «доказательстве» ничего подобного не предлагается! Там предполагается, что минимум достигается на конкретном неравномерном разбиении, после чего сумма квадратов уменьшается однократным «выравниванием» и получается противоречие с минимальностью. И это стало бы верным рассуждением, если предварительно доказать, что разбиение, дающее минимум, существует. Доказать его существование можно, например, ссылкой на теорему Вейерштрасса. Либо изначально построить доказательство иначе, например, так, как это сделано в нашем комментарии.*

10. Самоконтроль. Учителю важно научить школьников навыкам самоконтроля, в частности, приучить проверять получившийся ответ на правдоподобие. В классе было дано задание решить неравенство $|x^2 - 2x - 5| \leq 4$. Ученики *А*, *Б* и *В* получили такие ответы:

А) $\left(-\infty;\,1-\sqrt{10}\right]\cup\left[1+\sqrt{10};\,+\infty\right)$; *Б*) $\left[1+\sqrt{2};\,1+\sqrt{10}\right]$;

В) $\left[1-\sqrt{10};\,1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};\,1+\sqrt{10}\right]$

Учитель попросил каждого из них, посмотрев на исходное неравенство, объяснить, почему его ответ неправдоподобен.

1) Из каких соображений это можно сделать? Какие свойства входящей в неравенство функции могут при этом использоваться?

2) Какие еще соображения могут использоваться при проверке ответа на правдоподобие? Приведите примеры соответствующих алгебраических заданий (2 – 3 задачи) и неправдоподобных ответов к ним (не обязательно приводить несколько ответов). Объясните, как в этих случаях сделать проверку на правдоподобие.

Предложил Д.Э. Шноль

Комментарий. 1) А) Ответ $\left(-\infty;\,1-\sqrt{10}\right]\cup\left[1+\sqrt{10};\,+\infty\right)$ неправдоподобен по следующей причине: квадратичная функция при достаточно больших по модулю значениях аргумента ($x\to\infty$) принимает сколь угодно большие по модулю значения. Поэтому решением любого неравенства вида $\left|ax^2+bx+c\right|\le M$ не может оказаться луч (или объединение лучей).

Б) Так как квадратичная функция имеет ось симметрии (в данном случае *x* = 1), то решение неравенства вида $\left|ax^2+bx+c\right|\le M$ должно являться множеством точек, которое симметрично относительно этой оси. Отрезок $\left[1+\sqrt{2};\,1+\sqrt{10}\right]$ оси *x* этому условию не удовлетворяет.

В) График функции $y=\left|x^2-2x-5\right|$ имеет вид, схематично изображенный на рисунке. В зависимости от расположения прямой *y* = 4 по отношению к этому графику, решением данного неравенства может быть либо объединение двух отрезков (прямая 1), либо один отрезок (прямая 2). Объединение трех отрезков решением являться не может.

2) При проверке ответа на правдоподобие чаще всего также используются разнообразные свойства функций.

Приведем несколько примеров задач с объяснением проверки ответа на правдоподобие.

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x^2-8xy+y^2=4 \end{cases}$$

Ученик А получил ответ: $(2+\sqrt{2};2-\sqrt{2})$.

Ученик Б получил ответ: $(2+\sqrt{2};2-\sqrt{2})$; $(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$; $(-2+\sqrt{2};-2-\sqrt{2})$; $(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$; $(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2})$; $(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2})$.

А) Система является симметрической. Значит, если пара (*a*; *b*) является решением системы, то пара (*b*; *a*) также является решением системы. Ответ ученика получился не симметричным, следовательно, он неверен.

Б) Система двух уравнений второй степени не может иметь более четырех решений (если количество решений – конечно). Ученик получил 6 различных решений, значит, он ошибся.

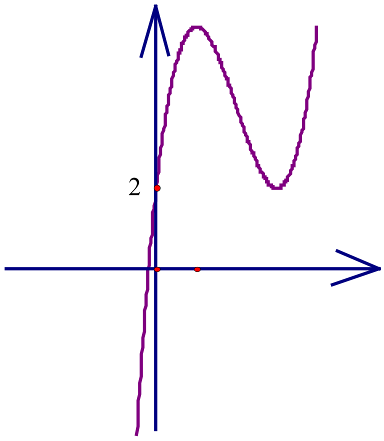
2. Решите уравнение: $\cos 6x+2\cos 2x=0$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$, *n*∈*Z*; $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, *k*∈*Z*.

Число π является периодом обеих функций, входящих в уравнение. Значит, любая серия решений также должна иметь этот период (а, возможно, и меньший). То есть, если $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ является решением, то и $x = \pi \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ также должно являться решением. Таким образом, приведенный ответ неверен.

3. Постройте график функции: $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

Ответ: см. рисунок.



Функция $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ в окрестности точки x_0 = 0, в первом приближении ведет себя как линейная функция $y = -9x + 2$ (иными словами, касательная к графику функции в точке x_0 = 0 задается уравнением $y = -9x + 2$). Очевидно, что на приведенном графике касательная в точке ноль является возрастающей функцией. Значит, график построен неверно.

Критерии проверки (*баллы за пункты 1) и 2) суммируются*).

1) Объяснено, почему ответ ученика неправдоподобен – по 2 балла за каждый из пунктов А), Б) и В).

2) Приведено разумное задание и объяснено, как проверить ответ на правдоподобие – по 2 балла за каждое (но не более 4 баллов).

Перечислены разумные соображения, позволяющие проверять ответы на правдоподобие, но примеры заданий не приведены – 1 балл.