Решения.

I. *Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. (*А.В. Спивак*) Винни-Пух съедает 3 банки сгущенки и банку меда за 25 минут, а Пятачок — за 55 минут. Одну банку сгущенки и 3 банки меда Пух съедает за 35 минут, а Пятачок — за 1 час 25 минут. За какое время они вместе съедят 6 банок сгущенки?

Ответ: за 20 минут.

Решение. *Первый способ.* Из условия следует, что 4 банки сгущенки и 4 банки меда Пух съедает за 1 час, а Пятачок — за 2 часа 20 минут. Значит, одну банку сгущенки и одну банку меда Пух съедает за 15 минут, а Пятачок — за 35 минут. Используя первое из условий, получим, что 2 банки сгущенки Пух будет есть 10 минут, а Пятачок — 20 минут. Так как Пух ест сгущенку в два раза быстрее Пятачка, то за 20 минут они съедят 6 банок сгущенки.

Второй способ. Пусть Винни-Пух ест сгущенку со скоростью v_1 банки в минуту, а мед — со скоростью v_2 банки в минуту. Тогда можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}=25, \\ \dfrac{1}{v_1}+\dfrac{3}{v_2}=35 \end{cases}$$

Решив ее, получим, что $v_1=\dfrac{1}{5}$ (банки в минуту).

Пусть Пятачок ест сгущенку со скоростью u_1 банки в минуту, а мед — со скоростью u_2 банки в минуту. Тогда, решая аналогичную систему

$$\begin{cases} \dfrac{3}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}=55, \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{3}{u_2}=85 \end{cases}$$

получим, что $u_1=\dfrac{1}{10}$ (банки в минуту).

Таким образом, Пятачок и Винни-Пух вместе едят сгущенку со скоростью $u_1+v_1=\dfrac{3}{10}$ банки в минуту, следовательно, 6 банок сгущенки они съедят за $6:\dfrac{3}{10}=20$ минут.

2. (*Д.Э. Шноль*) При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{\sqrt{-x^2+ax}(2-x)}{(x^2-2x-15)^2}\geqslant 0$ имеет ровно три целых решения?

Ответ: при $a\in(-4;-2]\cup[2;+\infty)\setminus\{3;4;6;7;8;\dots\}$.

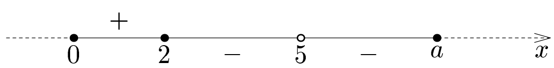
Решение. Решим неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+ax}(2-x)}{(x^2-2x-15)^2}$. Область ее определения

$$D_f=\begin{cases} [0,a]\setminus\{5\}, \text{ если } a\geqslant 0, \\ [a,0]\setminus\{-3\}, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Рассматриваемая функция непрерывна на области определения. $f(x)$ может обратиться в 0 при $x=0$ или $x=a$ или $x=2$.

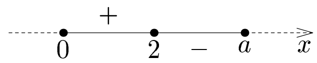
1) Пусть $a>5$, тогда



В этом случае решениями неравенства будет $x \in [0,2] \cup \{a\}$. Следовательно, в этом случае, для того, чтобы неравенство имело ровно три целых решения a не должно быть целым числом.

2) Если $a = 5$, то $x \in [0,2]$, следовательно, неравенство имеет ровно три целых решения.

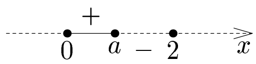
3) Пусть $2 < a < 5$, тогда



Тогда решения неравенства: $x \in [0,2] \cup \{a\}$, следовательно, также как и в первом случае, a не должно быть целым.

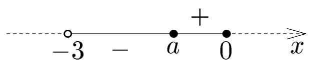
4) Если $a = 2$, то $x \in [0,2]$, следовательно, неравенство имеет ровно три целых решения.

5) Если $0 \leqslant a < 2$, то



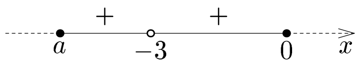
Решением неравенства будет $x \in [0,a]$. Следовательно, ни при каких $a \in (0,2)$ неравенство не будет иметь ровно три целых решения.

6) В случае, если $-3 \leqslant a < 0$, то



Решения неравенства: $x \in [a,0]$. Следовательно, при $a \in [-3,-2]$ неравенство имеет ровно три целых решения.

7) Если $a < -3$, то



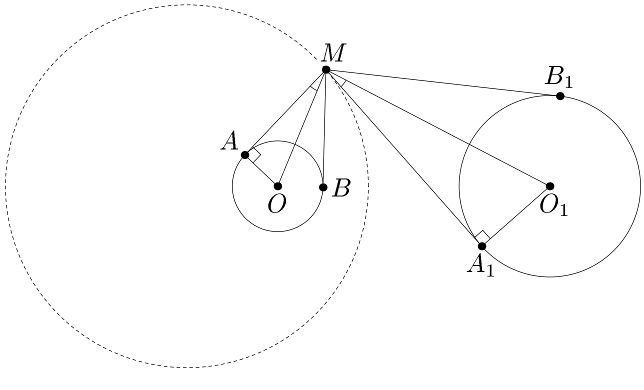
Следовательно, при $-4 < a < -3$ неравенство имеет ровно три целых решения.

Ответ задачи получается объединением рассмотренных случаев.

3. (*фольклор, предложил А.Г. Мякишев*) На плоскости даны два непересекающихся круга с центрами O и O_1. Из точки M плоскости проводятся касательные MA и MB к первому кругу, и касательные MA_1 и MB_1 ко второму кругу. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\angle AMB = \angle A_1MB_1$.

Ответ: если радиусы R и R_1 данных кругов не равны, то искомым ГМТ является окружность Аполлония точек O_1 и O_2 $\left(k = \dfrac{R}{R_1}\right)$, если же $R = R_1$, то искомое ГМТ — серединный перпендикуляр к отрезку OO_1.

Решение. Пусть точка M такова, что $\angle AMB = \angle A_1MB_1$. Проведем биссектрисы данных углов MO и MO_1, а также радиусы OA и O_1A_1. Так как $\angle OMA = \angle O_1MA_1$, то прямоугольные треугольники OMA и O_1MA_1 подобны, следовательно, $\dfrac{OM}{O_1M} = \dfrac{OA}{O_1A_1} = \dfrac{R}{R_1}$, то есть точка M принадлежит окружности Аполлония точек O и O_1 (геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных есть постоянная величина).



Любая точка этой окружности удовлетворяет условию, так как из пропорции $\frac{OM}{O_1M} = \frac{OA}{O_1A_1}$ следует подобие прямоугольных треугольников OMA и O_1MA_1, а из него, в свою очередь, следует, что $\angle AMB = \angle A_1MB_1$.

Отметим, что если $R = R_1$, то окружность Аполлония «превращается» в серединный перпендикуляр к отрезку OO_1, который в этом случае и является искомым ГМТ.

Критерии проверки:
8 баллов — решение верное, но пропущен случай $R = R_1$;
3 балла — если указано только, что $\frac{R}{R_1} = \frac{O_1M}{O_2M}$;
2 балла — рассмотрен только случай $R = R_1$.

4. (*А.В. Шаповалов*) Назовем шахматную доску 8×8, где между некоторыми клетками вставлены перегородки, лабиринтом. Лабиринт считается «хорошим», если ладья может обойти все поля доски, не прыгая через перегородки, иначе лабиринт считается «плохим». Каких лабиринтов больше: «хороших» или «плохих»?

Ответ: плохих лабиринтов больше.

Решение. Назовем лабиринт «хорошим по данной клетке», если из этой клетки ладья может хоть куда-нибудь сделать ход. Для того, чтобы лабиринт был хорошим, необходимо, чтобы он был хорошим по каждой своей клетке (достаточным условием это не является). Рассмотрим одну из угловых клеток. Существуют четыре способа поставить перегородки на границе этой клетке: нет перегородок, есть только вертикальная, есть только горизонтальная, есть обе перегородки. Таким образом, среди всех лабиринтов $\frac{3}{4}$ — хороших по одной угловой клетке. Рассуждая аналогично, получим, что среди всех лабиринтов хороших одновременно по двум угловым клеткам — $\frac{9}{16}$, а хороших одновременно по трем угловым клеткам — $\frac{27}{64}$, а это уже меньше половины всех лабиринтов.

Аналогичное рассуждение можно проводить для плохих лабиринтов, доказывая, что их больше половины.

II. *Каждое задание оценивается в 10 баллов.*

5. В качестве домашнего задания ученикам была предложена задача: "Найдите наклонные асимптоты графика функции $y = \sqrt{x^2+3x+9}$". Приводим решения двух учеников. Оцените каждое из решений и полученые ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

Решение Димы: «$y = \sqrt{x^2+3x+9} = \sqrt{(x+1,5)^2+6,75} = |x+1,5|\sqrt{1+\frac{6,75}{(x+1,5)^2}}$. Так как при $x \to \infty$ выражение $\frac{6,75}{(x+1,5)^2} \to 0$, то при $x \to +\infty$ асимптотой будет прямая $y = x+1,5$, а при $x \to -\infty$ прямая $y = -x-1,5$».

Решение Алеши: «$y = \sqrt{x^2+3x+9} = \sqrt{(x+1)^2+x+8} = |x+1|\sqrt{1+\frac{x+8}{(x+1)^2}}$. Так как при $x \to \infty$ выражение $\frac{x+8}{(x+1)^2} \to 0$, то при $x \to +\infty$ асимптотой будет прямая $y = x+1$, а при $x \to -\infty$ прямая $y = -x-1$».

Решение. Решения обоих школьников неверны, но в первом случае верен ответ. В обоих решениях осуществлен неверный переход к пределу в произведении двух функций, а именно, ищется предел второго сомножителя, и при этом не обращается внимание на то, что первый сомножитель стремится к бесконечности.

Поясним, почему в решении Димы все-таки получился верный ответ. Поскольку $(1+t)^{1/2} = 1+\frac{t}{2}+\alpha(t)$, *где* $\alpha(t)$ *— бесконечно малая при* $t \to 0$, *то* $|x+1,5|\sqrt{1+\frac{6,75}{(x+1,5)^2}} = |x+1,5|\Big(1+$

$+\dfrac{6,75}{2(x+1,5)^2}+\alpha\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\Big) = |x+1,5|+\alpha\left(\dfrac{1}{x}\right)$, *при* $x\to\infty$.

Критерии проверки:

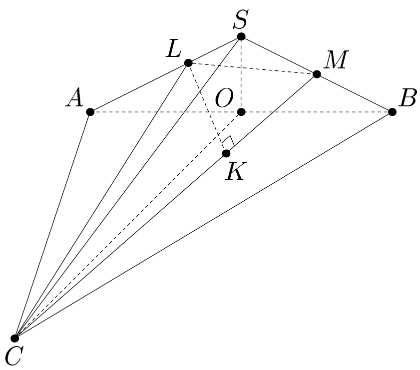
1 балл ставился в случае, если приводился только верный ответ и (или) правильное решение задачи;

3 балла — помимо верного ответа присутствовала попытка рассуждения относительно порядка малости функции, стоящей под корнем.

6. Проверьте предложенное решение задачи, указав ошибки (если они есть).

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AC = CB = 5$, $AB = 8$. Вершина S проектируется на плоскость основания в середину стороны AB, $SA = 4\sqrt{2}$. Через точку C, точку M — середину ребра SB и точку L, принадлежащую ребру SA, проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения, если она имеет наименьшее возможное значение.

"Решение". Пусть O — середина AB, тогда $OB = 4$, $OC = 3$, $OS = 4$. Независимо от расположения точки L на ребре AS, сечением пирамиды является треугольник CLM с фиксированным основанием CM. Поэтому, площадь сечения будет наименьшей, если его высота LK будет наименьшей. Следовательно, отрезок LK должен быть общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AS и CM.



Рассмотрим декартову систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а положительные направления осей OX, OY и OZ совпадают с лучами OC, OB и OS соответственно. В этой системе координат запишем координаты точек: $A(0;-4;0)$, $B(0;4;0)$, $C(3;0;0)$, $S(0;0;4)$, $M(0;2;2)$ и векторов $\overrightarrow{CM} = (-3;2;2)$, $\overrightarrow{SA} = (0;-4;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (3;4;0)$.

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = t\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC} + p\overrightarrow{CM}$, где t и p — некоторые действительные числа, причем $t \in [0;1]$. То есть, $\overrightarrow{LK}$ имеет координаты: $(3-3p; -4t+4+2p; -4t+2p)$. Так как $\overrightarrow{LK}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{CM}$, то $\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{SA} = 0$ и $\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$. Из первого равенства следует, что $2t - p - 1 = 0$, из второго — $16t - 17p + 1 = 0$, откуда $t = p = 1$. Таким образом, $\overrightarrow{LK}(0;2;-2)$. Наименьшая площадь сечения равна $0,5\cdot|\overrightarrow{CM}|\cdot|\overrightarrow{LK}| = 0,5\cdot\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{34}$.

Решение. Полученный ответ неверен. В приведенном решении не учтено, что общий перпендикуляр к прямым AS и CM совпадает с отрезком SM. Действительно, из условия задачи следует, что CO — высота равнобедренного треугольника ACB, то есть, $CO = \sqrt{CB^2 - BO^2} = 3$. Так как точка S проектируется в середину стороны AB, то $SB = SA$ и $SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = 4$. Следовательно, $CS = \sqrt{SM^2 + CM^2} = 5 = BC$, поэтому $CM \perp SB$. Кроме того, $AB^2 = SA^2 + SB^2$, то есть, $\angle ASB$ — прямой.

В этом случае сечением пирамиды будет вся грань SBC, площадь которой равна $2\sqrt{34}$ — в два раза больше, чем в заявленном ответе.

На самом деле, при «движении» точек L и K по направлению к точкам S и M, площадь сечения действительно уменьшается, но наименьшее значение не достигается — происходит «скачок».

Критерии проверки: задача считалась решенной верно, если указывалось, что "правильное" сечение совпадает со всей гранью, что не может быть верным ответом, так как или 1) грань не является сечением по определению; или 2) имеет площадь, не равную предельной.

Если указывалось, что ответ неверный, так как сечением будет являться треугольник SCM, то ставили 2 балла (поскольку указанный треугольник не является сечением, исходя из любого определения).

7. На контрольной работе была предложена задача:

Найдите наименьшее значение функции:
$y = 10|x-1| + 9|x-2| + 5|x-3| + 4|x-4| + 8|x-5| + 3|x-6| + 4|x-7|$.

Витя прислал Саше sms-сообщение с кратким решением:
"Так как $10+9+5+4+8+3+4 = 43$ и $10+9 < \frac{43}{2} < 10+9+5$, то наименьшее значение равно 74".

Восстановите логику Вити и оцените его решение.

Решение. Предполагается, что Витя имел в виду следующее: данная функция является непрерывной и кусочно-линейной. Угловой коэффициент графика на каждом промежутке является алгебраической суммой коэфициентов, стоящих перед модулями (заметим, что эта сумма не может равняться 0, поэтому график не содержит горизонтальных участков и наименьшее значение функция принимает в одной из точек «излома» графика). При $x > 7$ этот коэффициент равен 43. При движении влево по оси Ox и переходе через очередную точку «излома» этот коэффициент уменьшается. Функция будет достигать наименьшего значения в точке, при переходе через которую знак коэффициента изменится с положительного на отрицательный. Это произойдет тогда, когда сумма коэффициентов, которые мы берем со знаком +, впервые станет меньше суммы остальных коэффициентов (двойное неравенство в Витином "решении"). То есть, при $x = 3$. Значение функции в этом случае равно 74.

Таким образом, Витино решение верно по сути, но отсутствуют обоснования.

Комментарий. Отметим, что задача 7 на самом деле есть частный случай следующей задачи:
Найти минимальное значение функции $y = |x-x_1| + |x-x_2| + \dots + |x-x_{n-1}| + |x-x_n|$, где $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n$ $(*)$.

В задаче 7 $x_1 = x_2 = \dots = x_{10} = 1$,
$x_{11} = x_{12} = \dots = x_{19} = 2$,
$x_{20} = x_{21} = \dots = x_{24} = 3$,
$x_{25} = x_{26} = \dots = x_{28} = 4$,
$x_{29} = x_{30} = \dots = x_{36} = 5$,
$x_{37} = x_{38} = x_{39} = 6$,
$x_{40} = x_{41} = x_{42} = x_{43} = 7$, $n = 43$.

Вспомогательное утверждение. При $m \leqslant n$ $min(|x-m| + |x-n|) = n-m$ и точки минимума есть все точки промежутка $[m, n]$.

Перегруппируем в $(*)$ слагаемые следующим образом: $y = (|x-x_1| + |x-x_n|) + (|x-x_2| + |x-x_{n-1}|) + (|x-x_3| + |x-x_{n-2}|) + \dots$ $(**)$ Если n — четное, то в полученном выражении будет $\frac{n}{2}$ "скобок"; если же $n = 2k+1$, то "скобок" будет k и останется еще одно слагаемое $|x - x_{k+1}|$.

Заметим, что отрезки $[x_1, x_n]$, $[x_2, x_{n-1}]$, ... вложены друг в друга:

$$[x_1, x_n] \supseteq [x_2, x_{n-1}] \supseteq [x_3, x_{n-2}] \supseteq \dots$$

Следовательно, при четном n пересечением всех отрезков будет промежуток $[x_{n/2}, x_{n/2+1}]$, а при $n = 2k+1$ — пересечением является "серединная точка" x_{k+1}.

Заметим, что в равенстве $(**)$ первая скобка принимает наименьшее значение на $[x_1, x_n]$, вторая — на $[x_2, x_{n-1}]$, третья — на $[x_3, x_{n-2}]$ и т. д. Таким образом, на пересечении всех промежутков все "скобки" в $(**)$ одновременно принимают наименьшее значение, а следовательно, наименьшее значение принимает и вся сумма.

Также можно отметить, что наименьшее значение равно сумме длин всех вложенных отрезков.

8. Вам предлагается необычный вывод формулы Герона. Укажите причины, по которым это рассуждение не является строгим. Стали бы Вы его рассказывать школьникам? Если нет, то почему? Если да, то с какой педагогической целью? Как бы Вы прокомментировали школьникам это рассуждение?

Задача: выразить площадь треугольника S через длины a, b и c трех его сторон.

"Решение". Прежде всего заметим, что если $a+b=c$, то треугольник вырождается в отрезок, площадь которого равна нулю. Следовательно, искомое выражение для S должно содержать множитель $a+b-c$. В силу равноправности сторон также должны присутствовать множители $a+c-b$ и $b+c-a$. Таким образом, получаем выражение $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

Его размерность — третья степень длины, а размерность площади — вторая степень. Чтобы получить вторую степень, надо домножить это выражение на что-то размерности первой степени длины и извлечь квадратный корень. Поскольку «что-то» также должно быть симметрично относительно a, b, c, то не остатся ничего, кроме $a+b+c$.

Итак, $S = k\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$, где k — числовой коэффициент. Его значение найдем, рассмотрев, например, треугольник со сторонами $a=b=c=1$. Его площадь равна $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. По нашей формуле получаем $S = k\sqrt{3}$. Значит, $k = \dfrac{1}{4}$.

Таким образом, площадь треугольника со сторонами a, b и c можно вычислить по формуле $S = \dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$. Введя обозначение $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, получим формулу Герона в традиционном виде.

Решение. Все рассуждения основаны на том, что S^2 является многочленом от переменных a, b и c, что не доказано. Кроме того, указанный в решении способ получения из выражения третьей степени выражения второй степени не является единственным.

Тем не менее, предъявленное рассуждение может оказаться полезным для школьников, так как в нем содержится

а) идея оценки размерности величины;

б) идея рассмотрения "вырожденного" случая;

в) представление многочлена в виде произведения, использующее нули многочлена;

г) идея нахождения коэффициента пропорциональности путем рассмотрения удобного частного случая.

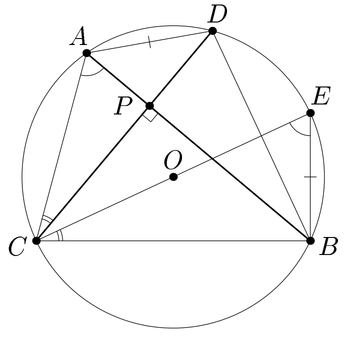
9. На окружности отмечены точки A, B, C и D так, что хорды AB и CD перпендикулярны. P — точка пересечения хорд AB и CD. Докажите, что $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$ равна квадрату диаметра окружности.

Найдите как можно больше способов решения этой задачи и запишите их так, как Вы бы хотели их видеть в работе Вашего ученика.

(Различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приёмы реализации одной и той же идеи.)

Решение. Пусть O — центр данной окружности, а R — ее радиус. Докажем равенство $BC^2 + AD^2 = 4R^2$, равносильное утверждению задачи.

Первый способ. Проведем диаметр CE (см. рис. 1). Поскольку $\angle CBE = 90°$, а углы CAB и CEB равны, то $\angle ACD = \angle ECB$, откуда $AD = BE$. Тогда, из прямоугольного треугольника CBE получаем, что $BC^2 + BE^2 = CE^2$ или $BC^2 + AD^2 = 4R^2$, что и требовалось доказать.



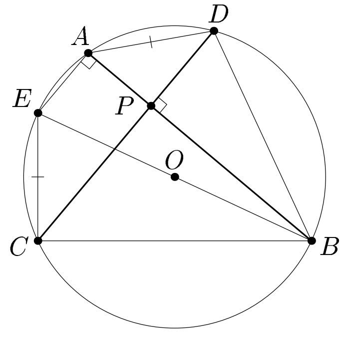


Рис. 1 Рис. 2

Второй способ. Проведем хорду AE, параллельную CD (см. рис. 2). Тогда $AE \perp AB$, то есть, $\angle EAB = 90^\circ$, откуда EB — диаметр окружности. Поскольку $CEAD$ — вписанная трапеция, то $CE = AD$. Следовательно, из прямоугольного треугольника ECB получаем, что $EC^2 + BC^2 = BE^2$, то есть, $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

Третий способ. Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$ (см. рис. 3). Из треугольника ACD (по следствию из теоремы синусов) получим, что $AD = 2R\sin\alpha$. Аналогично, из треугольника CAB: $BC = 2R\sin(90^\circ - \alpha) = 2R\cos\alpha$. Следовательно, $AD^2 + BC^2 = 4R^2\sin^2\alpha + 4R^2\cos^2\alpha = 4R^2$.

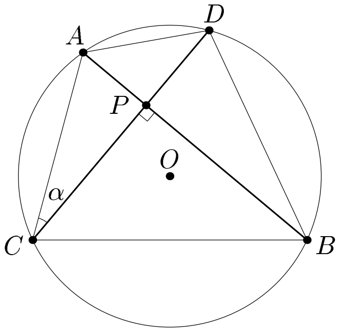


Рис. 3

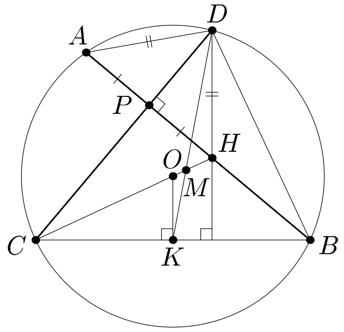


Рис. 4

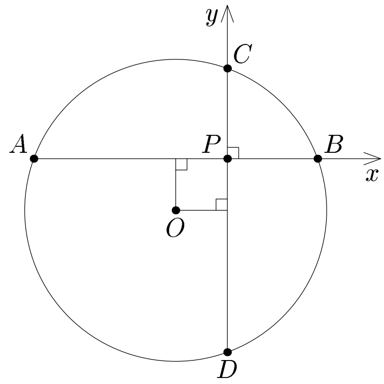


Рис. 5

Четвертый способ. Пусть H — ортоцентр треугольника BCD (см. рис. 4). Поскольку $BA \perp CD$, то $H \in BA$. Точка пересечения продолжения высоты треугольника и описанной окружности симметрична ортоцентру относительно прямой, содержащей сторону, следовательно, $AD = DH$. Опустим из точки O перпендикуляр OK на сторону BC и проведем радиус OC. Так как $DH = 2OK$ (гомотетия с центром M и коэффициентом -2), то $DH^2 + BC^2 = 4OK^2 + 4CK^2 = 4R^2$. Следовательно, $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

Пятый способ. Введем декартову систему координат с началом в точке P (см. рис. 5). Тогда $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$, $D(0,d)$. Следовательно, $BC^2 + AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Центр O описанной окружности имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$, поэтому уравнение этой окружности имеет вид $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2 = R^2$. Подставим координаты точек A и C в полученное уравнение: $(a-b)^2 + (c+d)^2 = 4R^2$ и $(a+b)^2 + (c-d)^2 = 4R^2$. Сложив полученные равенства и разделив обе части на 2, получим, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$, что и требовалось.

Критерии проверки: каждый представленный способ доказательства оценивался в 2 балла.

10. Перечислите как можно больше типичных ошибок, которые допускают школьники при решении иррациональных уравнений. Составьте одно или несколько уравнений так, чтобы указанные ошибки приводили к неверным ответам.

Ошибки при решении уравнений бывают двух типов:
1) приводящие к появлению посторонних корней;
2) приводящие к потере корней.
Посторонние корни могут появиться, если при выполнении преобразований,
а) Не учитывается область определения корня.
б) Не учитывается область значения корня.
в) Выражение $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ или $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ заменяется на выражение $\sqrt{ab}$ или $\sqrt{\frac{a}{b}}$ соответственно.

В большинстве случаев эти ошибки можно скомпенсировать за счет выполнения проверки полученных корней (если количество корней конечно).

Ошибки второго типа чаще всего возникают при неправильном вынесении за корень множителя, содержащего переменную или внесении такого сомножителя под знак корня ($\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$).

Задания методического блока предложили:

А.Д. Блинков, В.И. Голубев, А.В. Иванищук, А.И. Сгибнев, А.В. Хачатурян, Д.Э. Шноль.

В обсуждении варианта также участвовали:

Ю.А. Блинков, А.С. Горская, В.М. Гуровиц, А.Г. Мякишев, И.Б. Писаренко, П.В. Чулков, О.С. Шадрикова, И.В. Ященко.

Четыре способа решения **задачи 9** даны по книге И.А. Кушнир «Возвращение утраченной геометрии», издательство "Факт", Киев, 2004.