Решения.

I. *Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая — на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

Ответ: хозяйки потратили денег поровну, но вторая купила больше молока.

Решение. *Первый способ.* Так как первая хозяйка покупала ежедневно одинаковое количество молока, то средняя цена купленного ею литра молока равна средней цене молока за месяц. Поскольку ежедневно она покупала 1 литр, то в среднем она тратила 20 рублей в день — так же, как и вторая хозяйка, следовательно, они потратили одинаковое количество денег.

В те дни, когда молоко дешевое (стоит меньше, чем 20 рублей за литр), вторая хозяйка покупала больше молока, чем первая, а в те дни, когда молоко дорогое (стоит больше, чем 20 рублей за литр), вторая хозяйка покупала меньше молока, чем первая. Таким образом, вторая хозяйка действовала более экономно. Поскольку денег они потратили одинаково, то вторая хозяйка купила молока больше.

Второй способ. Пусть в этом месяце было n дней, а цены на молоко были равны c_1, c_2, $\ldots$, c_n соответственно. Известно, что $\dfrac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}=20$, поэтому первая хозяйка потратила $(c_1+c_2+\cdots+c_n)=20n$ рублей, то есть, столько же, сколько и вторая.

При этом, первая хозяйка купила n литров молока, а вторая — $\left(\dfrac{20}{c_1}+\dfrac{20}{c_2}+\cdots+\dfrac{20}{c_n}\right)$ литров молока. Используем неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим: $\dfrac{\frac{20}{c_1}+\frac{20}{c_2}+\cdots+\frac{20}{c_n}}{n}\geq\dfrac{n}{\frac{c_1}{20}+\frac{c_2}{20}+\cdots+\frac{c_n}{20}}=1$, следовательно, $\dfrac{20}{c_1}+\dfrac{20}{c_2}+\cdots+\dfrac{20}{c_n}\geq n$.

Равенство достигаться не может, так как среди чисел c_1, c_2, $\ldots$, c_n есть различные. Таким образом, вторая хозяйка купила больше молока.

2. Биссектрисы углов треугольника пересекают описанную окружность в точках A', B' и C'. Докажите, что $AA'+BB'+CC'$ больше периметра треугольника.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения биссектрис данного треугольника ABC. Проведем отрезки $A'B$ и $A'C$ (см. рис. 1), тогда из равенства углов BAA' и CAA' следует равенство дуг $A'B$ и $A'C$, из которого, в свою очередь, следует равенство проведенных хорд. Далее возможны различные способы решения.

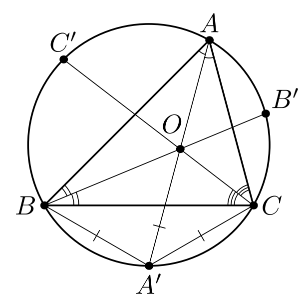

Рис. 1

Первый способ. Так как $\angle BOA'=\dfrac{\smile A'B+\smile AB'}{2}=\dfrac{\smile A'C+\smile CB'}{2}=\dfrac{\smile A'B'}{2}=\angle B'BA'$, то $A'B=OA'$. Аналогично, $B'A=B'C=OB'$ и $C'A=C'B=OC'$.

Следовательно, $2(AA'+BB'+CC')=2(AO+BO+CO)+2(OA'+OB'+OC')=(AO+BO)+(BO+CO)+(CO+AO)+(A'B+A'C)+(B'A+B'C)+(C'B+C'A)>AB+BC+CA+BC+CA+AB=2P_{ABC}$, откуда и следует утверждение задачи.

Второй способ. Применим для вписанного четырехугольника $ABA'C$ теорему Птолемея: $AB\cdot A'C+AC\cdot A'B=AA'\cdot BC$. Используя, что $A'B=A'C=a'>\dfrac{BC}{2}$, получим, что $AA'=(AB+AC)\cdot\dfrac{a'}{BC}>\dfrac{AB+AC}{2}$.

Аналогично, $BB'>\dfrac{BA+BC}{2}$ и $CC'>\dfrac{CA+CB}{2}$. Сложив три полученных неравенства, получим требуемое.

3. Решите уравнение: $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$.

Ответ: $1 \pm \sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть $x^2-2x-2 = y > 0$, тогда $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} y = 2\log_{8+4\sqrt{3}} y$, то есть исходное уравнение примет вид:

$$2\log_{8+4\sqrt{3}} y = \log_{2+\sqrt{3}}(y-1) \Leftrightarrow \log_{8+4\sqrt{3}} y = \log_{(2+\sqrt{3})^2}(y-1) \Leftrightarrow \log_{8+4\sqrt{3}} y = \log_{7+4\sqrt{3}}(y-1).$$

Пусть $8+4\sqrt{3} = b > 1$, тогда $\log_b y = \log_{b-1}(y-1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln y}{\ln b} = \dfrac{\ln(y-1)}{\ln(b-1)} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(y-1)}{\ln y} = \dfrac{\ln(b-1)}{\ln b}$.

Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{\ln(t-1)}{\ln t}$, $t > 1$; $f'(t) = \dfrac{\ln t^t - \ln(t-1)^{t-1}}{t(t-1)\ln^2 t} > 0$ при $t-1 > 1$, так как при $x > 1$ функция $g(x) = x^x$ — возрастает. Также $f'(t) > 0$ и при $1 < t \leq 2$, поскольку $t^t > 1$, а $(t-1)^{(t-1)} < 1$.

Следовательно, $f(t)$ — возрастает, то есть полученное уравнение имеет не более одного корня.

Тогда $y = b$, то есть $x^2-2x-2 = 8+4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

4. На концах отрезка записано по единице. На каждом шаге между каждыми двумя соседними числами вписывают их сумму. То есть, на первом шаге между двумя единицами записывают 2, на втором шаге дописывают две тройки, и так далее. Сделано 2005 шагов. Сколько раз среди выписанных чисел встретится число 2005?

Ответ: $\varphi(2005) = 2005\left(1-\dfrac{1}{401}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right) = 1600$, где $\varphi(n)$ — *функция Эйлера*, то есть, количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним (по определению, $\varphi(1) = 1$).

Решение. Докажем более общее утверждение: на n-ом шаге среди выписанных чисел число n встретится $\varphi(n)$ раз.

Лемма. Число n может появиться только в результате сложения двух взаимно простых чисел a и b.

Доказательство. Предположим, что это не так, и на каком-то шаге рядом были записаны числа a и b, такие, что $a+b = n$, НОД$(a,b) = x > 1$. Пусть $a > b$, тогда на предыдущем шаге a получилось сложением b и какого-то c, следовательно, c тоже делится на x. Рассуждая аналогично, получаем, что на каждом предыдущем шаге рядом стояли два не взаимно простых числа, следовательно, и на первом шаге тоже — противоречие.

Таким образом, если на каком-то шаге среди записанных чисел появилось число n, то только в результате сложения двух взаимно простых чисел. Заметим также, что если n появилось в результате сложения a и b, то НОД$(n,a) = 1$ и НОД$(n,b) = 1$.

Покажем, что до n-ого шага все такие способы получения n были реализованы. То есть, каждые два взаимно простых числа a и b, такие, что $a+b = n$, НОД$(n,a) = 1$, НОД$(n,b) = 1$, в некоторый момент (но не позднее, чем на $(n-1)$-ом шаге) были записаны рядом.

Докажем это с помощью метода математической индукции. Единственная двойка появилась уже на первом шаге, поэтому база индукции верна. Пусть теперь для любого k, меньшего n все такие способы получения k были реализованы. То есть, любые два взаимно простых числа a и b, таких, что $a+b = k$, в некоторый момент были записаны рядом.

Рассмотрим какое-то представление $n = x+(n-x)$ в виде суммы взаимно простых слагаемых. Пусть, для определенности, $n-x > x$. Так как $(n-x, x) = 1$, $n-x < n$, и по предположению индукции $n-x$ было реализовано всеми возможными способами, то оно было реализовано и как результат сложения x и $n-2x$, следовательно, не позже, чем на $(n-x)$-ом шаге числа x и $n-x$ стояли рядом, следовательно, не позже, чем на $(n-x+1)$-ом шаге, между ними будет записано число n.

Докажем теперь, что каждая такая реализация единственна. То есть, число n могло появиться в результате сложения $n-x$ и x только один раз ($n = (n-x)+x$ и $n = x+(n-x)$ — две различные реализации). Также используем индукцию. Пусть для любого k, меньшего чем n, утверждение верно. Предположим, что нашлось такое x, что число n в виде суммы $x + (n - x)$ было реализовано более одного раза. Но тогда и $n-x$ было реализовано в виде суммы $x+(n-2x)$ по-крайней мере, дважды. Противоречие.

Осталось заметить, что всевозможных представлений n в виде суммы взаимно простых чисел (с фиксированным порядком) $x + (n - x) = n$ ровно $\varphi(n)$, поскольку x пробегает $\varphi(n)$ значений.

II. *Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

5. Решите уравнение: $\sqrt{x^2 - 1} = (x + 5)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Ответ: -1.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{(x-1)(x+1)} = (x+5)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Тогда $x = -1$ — корень уравнения. Кроме того, $\sqrt{x-1} = (x+5)\sqrt{\dfrac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-1})^2 = x+5 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Полученная система решений не имеет.

В приведенном "решении" потерян еще один корень уравнения: $x = -2$.

Это произошло при замене выражений $\sqrt{(x-1)(x+1)}$ и $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ на выражения $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$ и $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ соответственно. Тем самым были использованы равенства $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, которые выполняются одновременно только при $a \geq 0$ и $b > 0$.

На самом деле, $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$ и $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, поэтому приведенный способ решения, в котором фактически разобран случай, когда $x > 1$, требуется дополнить разбором случая $x \leq -1$ (или $x < -1$ с учетом ранее найденного корня).

6. Теорема. Если возрастающая функция дифференцируема на некотором интервале, то в каждой точке этого интервала ее производная положительна.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке x_0 некоторого интервала I. Тогда $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Так как $f(x)$ возрастает на интервале I, то при $x > x_0$ получим, что $f(x) > f(x_0)$, а при $x < x_0$ получим, что $f(x) < f(x_0)$. В обоих случаях рассматриваемая дробь положительна, поэтому $f'(x_0) > 0$. Таким образом, в любой точке интервала I производная положительна, что и требовалось доказать.

Сформулированная "теорема" неверна, например, рассмотрим возрастающую функцию $f(x) = x^3$ на $(-1; 1)$, тогда $f'(0) = 0$.

Ошибка в приведенном "доказательстве" заключается в том, что предел функции, принимающей положительные значения, может быть не только положительным, но и равным нулю.

7. Теорема. Сумма плоских углов трехгранного угла меньше, чем $360°$.

Доказательство. Проведем плоскость α, пересекающую все ребра данного трехгранного угла с вершиной P, но не перпендикулярную ни одному из них и не перпендикулярную ни одной из граней этого угла. Пусть α пересекает ребра трехгранного угла в точках A, B и C.

Рассмотрим P' — ортогональную проекцию точки P на плоскость α. Тогда проекциями плоских углов APB, BPC и CPA трехгранного угла служат углы $AP'B$, $BP'C$ и $CP'A$ соответственно. Так как ортогональная проекция угла, стороны которого пересекают плоскость проекции, больше самого угла, то $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA < \angle AP'B + \angle BP'C + \angle CP'A$.

Исходя из способа построения плоскости α, возможны два случая: 1) P' лежит внутри треугольника ABC; 2) P' лежит вне треугольника ABC. В первом случае сумма углов $AP'B$, $BP'C$ и $CP'A$

равна $360°$, а во втором случае она меньше, чем $360°$. Следовательно, искомая сумма плоских углов меньше, чем $360°$, что и требовалось доказать.

Сформулированное утверждение безусловно верное, а приведенное "доказательство" неверное. В нем использовано утверждение: "ортогональная проекция угла, стороны которого пересекают плоскость проекции, больше самого угла".

Покажем, что это утверждение не верно. Рассмотрим тетраэдр $CABC'$, в котором ребро CC' перпендикулярно плоскости $AC'B$, $|AB| = 1$; $|BC'| = 10$; $|AC'| = 3\sqrt{13}$; $|CC'| = 2$ (см. рис. 2). Тогда, по теореме Пифагора, $|AC| = 11$, $|BC| = 2\sqrt{26}$. По теореме косинусов из треугольников ABC и ABC' получим, что $\cos\angle ACB = \dfrac{56}{11\sqrt{26}}$; $\cos\angle AC'B = \dfrac{18}{5\sqrt{13}}$.

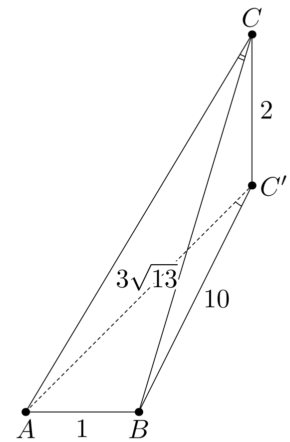

Рис. 2

Следовательно, $\dfrac{\cos\angle ACB}{\cos\angle AC'B} = \dfrac{70\sqrt{2}}{99} < 1$, поскольку $(70\sqrt{2})^2 = 9800 < 9801 = 99^2$. Таким образом, $\cos\angle ACB < \cos\angle AC'B$. Так как эти углы — острые, то $\angle ACB > \angle AC'B$, при этом угол $AC'B$ является ортогональной проекцией угла ACB.

Критерии сравнения величины угла и величины его ортогональной проекции можно получить из теоремы о площади ортогональной проекции треугольника или из теоремы косинусов для трехгранного угла (см., например, Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: В 2 т. — Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. — М. : МЦНМО, 2005, стр. 54 – 58).

III. *Каждый способ решения оценивается в 2 балла.*

8. Сравните числа: $\sqrt{2004} + \sqrt{2006}$ и $2\sqrt{2005}$.

Ответ: $\sqrt{2004} + \sqrt{2006} < 2\sqrt{2005}$.

Решение. *Первый способ.* Сравним квадраты данных чисел: $(\sqrt{2004} + \sqrt{2006})^2 = 4010 + 2\sqrt{2004 \cdot 2006}$; $(2\sqrt{2005})^2 = 4 \cdot 2005 = 4010 + 2\sqrt{2005^2}$. Учитывая, что $2004 \cdot 2006 = (2005 - 1)(2005 + 1) = 2005^2 - 1 < 2005^2$ и используя возрастание функции $f(x) = \sqrt{x}$ получаем ответ.

Второй способ. Сравним числа $\sqrt{2006} - \sqrt{2005}$ и $\sqrt{2005} - \sqrt{2004}$, используя тождество на множестве положительных чисел: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Получим, что $\sqrt{2006} - \sqrt{2005} = \dfrac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}}$; $\sqrt{2005} - \sqrt{2004} = \dfrac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}}$. Следовательно, первое число меньше, поэтому, $\sqrt{2004} + \sqrt{2006} < 2\sqrt{2005}$.

Третий способ. Рассмотрим функцию $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ на $(0; +\infty)$. Так как $\forall x > 0$ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$, то $g(x)$ убывает на $(0; +\infty)$. Следовательно, $\sqrt{2006} - \sqrt{2005} < \sqrt{2005} - \sqrt{2004}$, откуда и получаем ответ.

Четвертый способ. Используем неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным для положительных чисел: $\dfrac{\sqrt{2004}+\sqrt{2006}}{2} < \sqrt{\dfrac{2004+2006}{2}}$. Умножив обе части полученного неравенства на 2, получим ответ.

Пятый способ. Используем то, что график функции $f(x) = \sqrt{x}$ расположен на $[2004; 2006]$ выпуклостью вверх. Для функций, график которых расположен на $[a; b]$ выпуклостью вверх, выполняется неравенство: $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} < f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ (*неравенство Йенсена*). Следовательно, $\dfrac{\sqrt{2004}+\sqrt{2006}}{2} < \sqrt{2005}$, откуда и получаем ответ.

9. Дано: $\triangle ABC$; $E \in [AC]$, $|AE| : |EC| = 3 : 4$; $M \in [BC]$, $|BM| = |MC|$; $(AM) \cap (BE) = O$.

Найти: $|EO| : |OB|$.

Ответ: $|EO| : |OB| = 3 : 7$.

Решение. *Первый способ.* Проведем $(EQ) \parallel (AM)$ (см. рис. 3). По теореме о пропорциональных отрезках $|MQ| : |QC| = |AE| : |EC| = 3 : 4$, значит, $|MQ| : |MB| = 3 : 7 = |EO| : |OB|$.

Отметим, что при таком способе решения можно делать другое (аналогичное) дополнительное построение, а также вместо теоремы о пропорциональных отрезках использовать подобие треугольников.

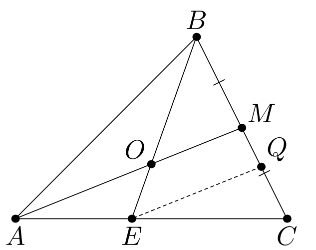

Рис. 3

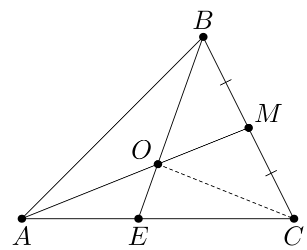

Рис. 4

Второй способ. Применим теорему Менелая для прямой AM, пересекающей стороны треугольника BCE (см. рис. 4): $\frac{|BM|}{|MC|} \cdot \frac{|CA|}{|AE|} \cdot \frac{|EO|}{|OB|} = 1$. Учитывая, что $|AM| = |MC|$ и $\frac{|CA|}{|AE|} = \frac{7}{3}$, получаем ответ.

Третий способ. Проведем отрезок OC (см. рис. 4). Так как AM — медиана треугольника ABC, а OM — медиана треугольника BOC, то выполняются равенства для площадей: $S_{MAB} = S_{MAC}$ и $S_{MOB} = S_{MOC}$. Следовательно, $S_{AOB} = S_{AOC}$.

Пусть $|EO| : |OB| = p : q$, тогда $S_{AOB} = qx$; $S_{AOE} = px$ (x — положительный коэффициент пропорциональности). Так как $S_{AOE} : S_{COE} = |AE| : |EC|$, то $S_{COE} = \frac{4}{3}\,px$.

Таким образом, $qx = px + \frac{4}{3}\,px \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{3}{7}$.

Четвертый способ. Пусть $|EO| : |OB| = p : q$. Рассмотрим векторный базис на плоскости: $\overline{AB} = \bar{b}$ и $\overline{AC} = \bar{c}$. Тогда $\overline{AM} = \frac{1}{2}\,(\bar{b} + \bar{c})$; $\overline{AO} = \frac{q\overline{AE} + p\overline{AB}}{p+q} = \frac{3/7 q\bar{c} + p\bar{b}}{p+q}$. Так как $\overline{AO} \parallel \overline{AM}$, то $\exists \alpha \,|\, \overline{AO} = \alpha\overline{AM}$. Используя теорему о единственности разложения вектора по базису, получим: $\begin{cases} \frac{p}{p+q} = \frac{1}{2}\,\alpha, \\ \frac{3q}{7(p+q)} = \frac{1}{2}\,\alpha \end{cases}$. Следовательно, $p = \frac{3}{7}\,q$, откуда и получаем ответ.

Пятый способ. Поместим в вершины A, B и C треугольника ABC массы 4, 3 и 3, соответственно. Тогда центр масс точек A и C находится на отрезке AC и делит его в отношении $3 : 4$, считая от вершины A, то есть, совпадает с точкой E. Следовательно, центр масс всей системы лежит на отрезке BE и делит его в отношении $7 : 3$, считая от вершины B.

С другой стороны, центр масс точек B и C лежит на отрезке BC и делит его пополам, то есть, совпадает с точкой M. Следовательно, центр масс всей системы лежит на отрезке AM.

Поскольку центр масс всей системы одновременно принадлежит отрезкам AM и BE, то он совпадает с точкой их пересечения. Следовательно, $|EO| : |OB| = 3 : 7$.

IV. *Каждая найденная ошибка оценивается в 1 балл.*

10. Итак, требуется доказать, что если X и Y — целые числа в уравнении $X^n + Y^n = Z^n$, то Z (при $n > 2$) всегда не целое. Прежде чем браться за теорему Ферма, повторим теорему Пифагора: "Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов". Мы вправе для ее написания использовать любые переменные. Запишем ее таким образом: $X^2 + Y^2 = R^2$, где X, Y, R — целые числа, а Z, утверждает Ферма, — не целое. Попробуем доказать. Понятно, Z не равно R при одних и тех же X, Y. Легко доказуемо алгебраически, да и просто логически, что Z всегда меньше, чем R. Когда мы возводим X и Y в более высокую степень, то умножаем их на самих себя. Потом их складываем и получаем Z в той же степени n. А при возведении в нее R каждое из слагаемых надо умножить на R, которое больше, чем X и Y. К примеру, $R^3 = (X^2 + Y^2)\,R = X^2R + Y^2R$.

Записываем длины сторон треугольника XYR в тригонометрическом виде: $X = R\sin A$, $Y = R\cos A$. А значит, $Z^n = X^n + Y^n = R^n(\sin A + \cos A)$. Тогда $Z = R(\sin A + \cos A)$. Ранее мы доказали, что Z всегда меньше R, стало быть, $\sin A + \cos A < 1$. Такую тригонометрическую функцию можно найти в любом учебнике математики старших классов и убедиться по графику или таблице, что если значение функции меньше 1, то угол A больше $60°$ и меньше $90°$. А что произойдет в этом случае с прямым углом , находящимся между катетами? Он больше уже не будет прямым и окажется в тех же пределах: $60° < B < 90°$.

Любой десятиклассник, у которого по математике выше тройки, с ходу воспроизведет вам формулу соотношения сторон треугольника $Z^2 = X^2 + Y^2 - 2XY\cos B$. При $60° < B < 90°$ $\cos B$ — число не целое. А значит, и Z неминуемо является таковым при целых значениях X и Y. Что и требовалось доказать.

В приведенном тексте допущены следующие ошибки:

1) Формулировка теоремы не точна: требуется добавить, что X, Y и Z отличны от нуля и n — натуральное число.

2) В "доказательстве" нигде не рассматривается случай, когда среди чисел X, Y и Z есть отрицательные.

3) В равенстве $X^2 + Y^2 = R^2$ из того, что X и Y — целые, не следует, что R — целое.

4) Числа X и Y возведены в степень не верно.

5) Неверно извлечен корень n-ой степени из Z^n.

6) Неверно то, что $\sin A + \cos A$ принимает значение меньше 1 на промежутке от $60°$ до $90°$.

7) Из приведенных рассуждений не следует, что треугольник со сторонами X, Y и Z существует.

8) Из приведенных рассуждений не следует, что $\angle B > 60°$.

9) Из того, что $\cos B$ — число не целое, не следует, что Z — не целое.

Задачи предложили:

А.Д. Блинков, Р.К. Гордин, В.М. Гуровиц, А.В. Хачатурян, И.В. Ященко.