Московский центр непрерывного математического образования
Московский институт открытого образования Департамента образования города Москвы
Московский педагогический государственный университет
Московский городской педагогический университет

Москва 24 сентября 2006 года

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 — №4. «Математический» (задачи для решения).

№5 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа.

I. Решите задачи.

1. Винни-Пух съедает **3** банки сгущенки и банку меда за **25** минут, а Пятачок — за **55** минут. Одну банку сгущенки и **3** банки меда Пух съедает за **35** минут, а Пятачок — за **1** час **25** минут. За какое время они вместе съедят **6** банок сгущенки?

2. При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ неравенство $\dfrac{\sqrt{-x^2+ax}(2-x)}{(x^2-2x-15)^2} \geqslant 0$ имеет ровно три целых решения?

3. На плоскости даны два непересекающихся круга с центрами O и O_1. Из точки M плоскости проводятся касательные MA и MB к первому кругу, и касательные MA_1 и MB_1 ко второму кругу. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\angle AMB = \angle A_1MB_1$.

4. Назовем шахматную доску 8×8, где между некоторыми клетками вставлены перегородки, лабиринтом. Лабиринт считается «хорошим», если ладья может обойти все поля доски, не прыгая через перегородки, иначе лабиринт считается «плохим». Каких лабиринтов больше: «хороших» или «плохих»?

II. Методический блок

5. В качестве домашнего задания ученикам была предложена задача: «Найдите наклонные асимптоты графика функции $y = \sqrt{x^2+3x+9}$». Приводим решения двух учеников. Оцените каждое из решений и полученые ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

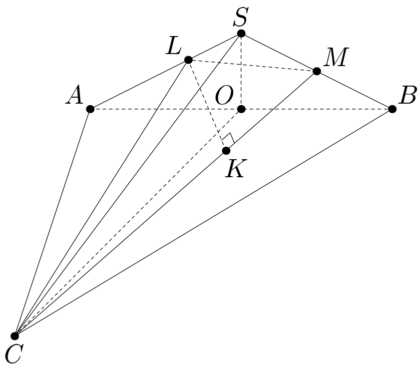
Решение Димы: «$y = \sqrt{x^2+3x+9} = \sqrt{(x+1,5)^2+6,75} = |x+1,5|\sqrt{1+\dfrac{6,75}{(x+1,5)^2}}$. Так как при $x \to \infty$ выражение $\dfrac{6,75}{(x+1,5)^2} \to 0$, то при $x \to +\infty$ асимптотой будет прямая $y = x+1,5$, а при $x \to -\infty$ прямая $y = -x-1,5$».

Решение Алеши: «$y = \sqrt{x^2+3x+9} = \sqrt{(x+1)^2+x+8} = |x+1|\sqrt{1+\dfrac{x+8}{(x+1)^2}}$. Так как при $x \to \infty$ выражение $\dfrac{x+8}{(x+1)^2} \to 0$, то при $x \to +\infty$ асимптотой будет прямая $y = x+1$, а при $x \to -\infty$ прямая $y = -x-1$».

6. Проверьте предложенное решение задачи, указав ошибки (если они есть).

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AC = CB = 5$, $AB = 8$. Вершина S проектируется на плоскость основания в середину стороны AB, $SA = 4\sqrt{2}$. Через точку C, точку M — середину ребра SB и точку L, принадлежащую ребру SA, проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения, если она имеет наименьшее возможное значение.

Решение. Пусть O — середина AB, тогда $OB = 4$, $OC = 3$, $OS = 4$. Независимо от расположения точки L на ребре AS, сечением пирамиды является треугольник CLM с фиксированным основанием CM. Поэтому, площадь сечения будет наименьшей, если его высота LK будет наименьшей. Следовательно, отрезок LK должен быть общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AS и CM.



Рассмотрим декартову систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а положительные направления осей OX, OY и OZ совпадают с лучами OC, OB и OS соответственно. В этой системе координат запишем координаты точек: $A(0; -4; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(3; 0; 0)$, $S(0; 0; 4)$, $M(0; 2; 2)$ и векторов $\overrightarrow{CM} = (-3; 2; 2)$, $\overrightarrow{SA} = (0; -4; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 4; 0)$.

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = t\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC} + p\overrightarrow{CM}$, где t и p — некоторые действительные числа, причем $t \in [0; 1]$. То есть, $\overrightarrow{LK}$ имеет координаты: $(3 - 3p; -4t + 4 + 2p; -4t + 2p)$. Так как $\overrightarrow{LK}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{CM}$, то $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{SA} = 0$ и $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$. Из первого равенства следует, что $2t - p - 1 = 0$, из второго — $16t - 17p + 1 = 0$, откуда $t = p = 1$. Таким образом, $\overrightarrow{LK}(0; 2; -2)$. Наименьшая площадь сечения равна $0,5 \cdot |\overrightarrow{CM}| \cdot |\overrightarrow{LK}| = 0,5 \cdot \sqrt{17} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{34}$.

7. На контрольной работе была предложена задача:

Найдите наименьшее значение функции:
$y = 10|x-1| + 9|x-2| + 5|x-3| + 4|x-4| + 8|x-5| + 3|x-6| + 4|x-7|$.

Витя прислал Саше sms-сообщение с кратким решением:
"Так как $10+9+5+4+8+3+4 = 43$ и $10+9 < \dfrac{43}{2} < 10+9+5$, то наименьшее значение равно 74".

Восстановите логику Вити и оцените его решение.

8. Вам предлагается необычный вывод формулы Герона. Укажите причины, по которым это рассуждение не является строгим. Стали бы Вы его рассказывать школьникам? Если нет, то почему? Если да, то с какой педагогической целью? Как бы Вы прокомментировали школьникам это рассуждение?

Задача: выразить площадь треугольника S через длины a, b и c трех его сторон.

Решение. Прежде всего заметим, что если $a + b = c$, то треугольник вырождается в отрезок, площадь которого равна нулю. Следовательно, искомое выражение для S должно содержать множитель $a + b - c$. В силу равноправности сторон также должны присутствовать множители $a + c - b$ и $b + c - a$. Таким образом, получаем выражение $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

Его размерность — третья степень длины, а размерность площади — вторая степень. Чтобы получить вторую степень, надо домножить это выражение на что-то размерности первой степени длины и извлечь квадратный корень. Поскольку «что-то» также должно быть симметрично относительно a, b, c, то не остатся ничего, кроме $a + b + c$.

Итак, $S = k\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$, где k — числовой коэффициент. Его значение найдем, рассмотрев, например, треугольник со сторонами $a = b = c = 1$. Его площадь равна $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. По нашей формуле получаем $S = k\sqrt{3}$. Значит, $k = \dfrac{1}{4}$.

Таким образом, площадь треугольника со сторонами a, b и c можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$. Введя обозначение $p = \frac{a+b+c}{2}$, получим формулу Герона в традиционном виде.

9. На окружности отмечены точки A, B, C и D так, что хорды AB и CD перпендикулярны. P — точка пересечения хорд AB и CD. Докажите, что $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ равна квадрату диаметра окружности.

Найдите как можно больше способов решения этой задачи и запишите их так, как Вы бы хотели их видеть в работе Вашего ученика.

(Различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приёмы реализации одной и той же идеи).

10. Перечислите как можно больше типичных ошибок, которые допускают школьники при решении иррациональных уравнений. Составьте одно или несколько уравнений так, чтобы указанные ошибки приводили к неверным ответам.

Пожалуйста, напишите, какие из предложенных заданий Вам больше всего понравились? Почему?