Департамент образования г. Москвы

Центр педагогического мастерства

Московский Центр Непрерывного Математического Образования

журнал «Математика» ("Первое сентября")

Математический факультет Московского Педагогического Государственного Университета

и Московская ассоциация учителей математики

при поддержке фонда «Династия»

Москва 22 сентября 2013 года

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).

№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа.

I. Решите задачи.

1. ВИНОГРАД. Смуглянка собрала целое число килограммов винограда и ровно четверть винограда отдала парню. Тот разложил его по килограммовым пакетам (получилось не менее одного), а остаток съел. Если бы парень получил треть винограда, то количество пакетов с виноградом осталось бы прежним. Сколько винограда собрала смуглянка?

2. ШАРИКИ. В ящике лежат 111 шариков красного, синего, зелёного и белого цветов. Среди любых ста шариков обязательно найдутся 4 шарика различных цветов. Какое наименьшее количество шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 шарика различных цветов?

3. МАКСИМУМ. Известно, что $x^2 + xy + y^2 = x + y$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2$?

4. ФУНКЦИЯ. Существует ли такая функция f, отличная от постоянной, что для всех x, для которых $\cos x \neq 0$, выполняется равенство $f(\operatorname{tg} x) = f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$?

5. ТРАПЕЦИЯ. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD второй раз пересеклись в точке M. Прямая OM пересекает окружности, описанные около треугольников BOC и AOD, в точках K и L соответственно. Докажите, что M — середина отрезка KL.

II. Методический блок.

В заданиях №6–№9 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач» и «теорем», так и в «ответах», «решениях» и «доказательствах»). Если некорректно условие «задачи» («теоремы»), то объясните, почему это так и какие ошибки допущены в «решении» («доказательстве»). Если неверно только «решение» («доказательство»), то укажите все ошибки и приведите верное решение (доказательство).

6. ЗАЗЕРКАЛЬЕ. **«Задача».** В Зазеркалье имеют хождение только монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет (не менее двух), а на сдачу получила на две монеты больше. Какова минимально возможная стоимость покупки?

«Ответ»: 10 гиней.

«Решение». *Пример.* Алиса отдала 2 монеты по 25 гиней, а получила на сдачу 2 монеты по 7 гиней и 2 монеты по 13 гиней.

Оценка. Заметим, что стоимость покупки не может быть меньше самой мелкой монеты. Кроме того, бессмысленно платить какую-либо монету и ее же получать в виде сдачи. Перебором остальных возможностей несложно убедиться, что если из суммы номиналов любых двух монет вычитать сумму номиналов любых четырех монет, то невозможно получить ни 7, ни 8, ни 9.

7. РОМБ. **«Задача».** В ромбе $ABCD$ на сторонах AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $\angle DEF = \angle DFE$. Докажите, что $BE = BF$.

«Решение». Из данного равенства углов следует равенство отрезков DE и DF. Следовательно, равны треугольники DEA и DFC. Тогда $AE = CF$, откуда $BE = BF$.

8. МНОГОГРАННИК. **«Теорема».** Плоскости граней выпуклого многогранника разбивают пространство на $2P + 3$ части, где P — количество его ребер.

«Доказательство». Одна из искомых частей пространства — внутри многогранника. Каждая из остальных частей имеет с многогранником либо общую грань, либо общее ребро, либо общую вершину. Наглядно это легко представить, рассмотрев куб или тетраэдр.

Таким образом, искомое количество частей равно В + Г + Р + 1 (В и Г — количество вершин и граней соответственно). По формуле Эйлера: В + Г − Р = 2, поэтому В + Г + + Р + 1 = 2Р + 3.

9. СУММА ПЛОЩАДЕЙ. **«Задача».** Диагональ квадрата площади S произвольным образом разбита на n частей. На каждой из этих частей как на диагонали построен новый квадрат. Докажите, что сумма площадей получившихся квадратов не меньше, чем $\frac{S}{n}$.

«Решение». Величина $\frac{S}{n}$ достигается, если разбить диагональ данного квадрата на равные части. Пусть наименьшее значение суммы площадей новых квадратов достигается при каком-то другом разбиении. Тогда в этом разбиении найдутся два соседних неравных отрезка с длинами a и b. Площади соответствующих квадратов будут равны $\frac{a^2}{2}$ и $\frac{b^2}{2}$. Передвинем точку, разделяющую эти отрезки, так, чтобы они стали равными, тогда получим два одинаковых квадрата площади $\frac{(a+b)^2}{8}$ каждый. Так как $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} > 0$, то при таком перемещении сумма площадей квадратов уменьшится. Таким образом, получено противоречие. Следовательно, $\frac{S}{n}$ — наименьшее значение искомой суммы.

10. САМОКОНТРОЛЬ. Учителю важно научить школьников навыкам самоконтроля, в частности, приучить проверять получившийся ответ на правдоподобие. В классе было дано задание решить неравенство $|x^2 - 2x - 5| \leqslant 4$. Ученики А, Б и В получили такие ответы:

А) $(-\infty; 1-\sqrt{10}] \cup [1+\sqrt{10}; +\infty)$;

Б) $[1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{10}]$;

В) $[1-\sqrt{10}; 1-\sqrt{2}] \cup \left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup [1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{10}]$.

Учитель попросил каждого из них, посмотрев на исходное неравенство, объяснить, почему его ответ неправдоподобен.

1) Из каких соображений это можно сделать? Какие свойства входящей в неравенство функции могут при этом использоваться?

2) Какие еще соображения могут использоваться при проверке ответа на правдоподобие? Приведите примеры соответствующих алгебраических заданий (2–3 задачи) и неправдоподобных ответов к ним (не обязательно приводить несколько ответов). Объясните, как в этих случаях сделать проверку на правдоподобие.