Департамент образования г. Москвы
Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
журнал «Математика» ("Первое сентября")
Математический факультет Московского Педагогического Государственного Университета
и Московская ассоциация учителей математики
при поддержке фонда «Династия»

Москва 21 сентября 2014 года

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).

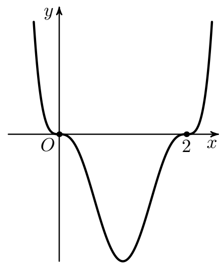
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа.

I. Решите задачи.

1. КВАДРАТЫ. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали большой квадрат. Из него, также по линиям сетки, вырезали меньший квадрат. После этого от большого квадрата осталось ровно 79 клеток. Обязательно ли вырезанный квадрат содержал одну из угловых клеток большого?

2. ПРЯМЫЕ. Даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, которые пересекают обе данные, красят в синий цвет. Укажите все точки пространства, которые останутся неокрашенными.



3. ГРАФИК. На рисунке схематически изображен график многочлена (*график касается оси x в двух точках*). Какую наименьшую степень может иметь этот многочлен?

4. УРАВНЕНИЕ. Докажите, что при всех натуральных n уравнение $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=n^2$ имеет хотя бы один рациональный корень, принадлежащий интервалу $(1;2)$.

5. ТРЕУГОЛЬНИК. В треугольнике ABC выполняется равенство $3AC=AB+BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно; DK и EL — ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины отрезка AC.

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. ДЕЛИТЕЛИ. **«Задача».** Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно 4 делителя и делящихся на 5?

«Ответ»: 10.

«Решение». У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвертый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомых чисел ровно 10.

7. ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ. **«Задача».** Положительные числа x, y и z таковы, что $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}=1$. Какие значения может принимать выражение $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$?

«Ответ»: 0.

«Решение». Заметим, что $\frac{x^2}{y+z}+x=\frac{x^2+xy+xz}{y+z}=\frac{x}{y+z}(x+y+z)$. Аналогично, $\frac{y^2}{z+x}+y=$ $=\frac{y}{z+x}(x+y+z)$ и $\frac{z^2}{x+y}+z=\frac{z}{x+y}(x+y+z)$.

Сложим почленно три полученных равенства, введя следующие обозначения: $A=\frac{x}{y+z}+$ $+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$, $B=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$ и вынося за скобки в правой части выражение $x+y+z$. Тогда $B+(x+y+z)=(x+y+z)A$. По условию $A=1$, поэтому $B=0$.

8. НЕРАВЕНСТВО ПТОЛЕМЕЯ. На уроке было предложено такое доказательство известного неравенства Птолемея: для любого четырехугольника $ABCD$ (в том числе и не плоского) $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$.

«Доказательство». 1) «Лемма». Для любых точек A, B, C и D пространства верно равенство: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Действительно, так как $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, то, подставив это в нужное равенство, получим: $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=0$. При раскрытии скобок все слагаемые в левой части сокращаются и получается верное равенство $0=0$.

2) Используем доказанное векторное равенство и неравенство $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\leqslant|\overrightarrow{a}|+\left|\overrightarrow{b}\right|$. Тогда $AC\cdot BD=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\right|\leqslant\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\right|\leqslant\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\right|\times$ $\times\left|\overrightarrow{BC}\right|=AB\cdot CD+BC\cdot AD$, что и требовалось.

Укажите все ошибки и недочеты этого «доказательства» (если таковые имеются).

9. ЯЩИКИ. На олимпиаде была предложена следующая задача:

На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе — по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

Из всего класса только Вася взялся за эту задачу и решил ее так:

«Решение». Пусть на первом складе было x ящиков, а на втором — y ящиков. Тогда на первом складе — $3x$ бракованных изделия, а на втором — $6y$. После перевозки пятидесяти ящиков число бракованных изделий на первом складе будет $3x-50\cdot 3$ и это равно $(x-50)\cdot 2$, так как среднее число бракованных изделий стало 2. Из уравнения $3x-150=2x-100$ находим, что $x=50$.

Аналогично, на втором складе стало $6y+150$ бракованных изделий, что равно $(y+50)\cdot 5$. Тогда $y=100$. Общее количество ящиков: $x+y=150$.

«Ответ»: 150.

1) В чем ошибся Вася?

2) Приведите верное решение.

3) Как убедить Васю и остальных учеников класса, что его «решение» неверное, не указывая конкретно, где ошибка? Как помочь школьникам найти ошибку, а затем и верное решение?

10. ПРОИЗВОДНАЯ. На уроке был предложен следующий способ доказательства известного неравенства $\sin x\leqslant x\leqslant \operatorname{tg} x$ для любого x из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

«Доказательство». $(\sin x)'=\cos x$; $(x)'=1$; $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; для любого x из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\cos x\leqslant 1\leqslant\frac{1}{\cos^2 x}$ и $\sin 0=\operatorname{tg} 0=0$. Следовательно, из трех рассматриваемых функций первая растет «медленнее» всех, а третья — «быстрее» всех.

Как Вы считаете, имеет ли смысл знакомить школьников с таким рассуждением? Подробно аргументируйте свою позицию.