Департамент образования г. Москвы
Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
журнал «Математика» ("Первое сентября")
Математический факультет Московского Педагогического Государственного Университета
и Московская ассоциация учителей математики

Москва 20 сентября 2015 года

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа.

I. Решите задачи.

1. КОРНИ ТРЕХЧЛЕНА Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня, один из которых лежит внутри отрезка $[0; 1]$, а другой — вне этого отрезка. Определите знак $f(b)$.

2. ЛОМАНАЯ В окна комнаты светит солнце, а в комнате неподвижно висит в воздухе четырёхзвенная замкнутая ломаная. Её тень на стене имеет форму параллелограмма. Через некоторое время тень передвинулась, но по-прежнему осталась параллелограммом. Докажите, что и сама ломаная — параллелограмм. (*Считаем, что солнечные лучи параллельны друг другу.*)

3. ЧИСЛО Натуральное число $n > 1$ таково, что десятичная запись числа $9997 \cdot n$ содержит только нечетные цифры. Найдите наименьшее возможное значение n.

4. ПЛАТОК Постиран квадратный платок площади 1м^2. Для просушки его вешают на веревку так, чтобы центр платка был на веревке. За час успевают высохнуть только те части платка, которые не перекрывают друг друга. Какова наибольшая суммарная площадь этих частей?

5. МНОГОЧЛЕН Пусть $f(x)$ — такой многочлен степени n, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ $f(k) = \dfrac{1}{k+1}$. Найдите $f(n+1)$.

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так и как его скорректировать (если это возможно), чтобы «решение» стало верным. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки, сделав подробные пояснения, а затем приведите верное решение.

6. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ «**Задача**». При каких значениях параметра a система уравнений $x^2 = 1 - y^2 = y - |a|$ имеет единственное решение?

«**Ответ**»: таких a нет.

«**Решение**». Рассмотрим уравнение $1 - y^2 = y - |a| \Leftrightarrow y^2 + y - (|a| + 1) = 0$. Так как система имеет единственное решение, то это уравнение также должно иметь единственное решение, то есть $D = 1 + 4(1 + |a|) = 0$. Но последнее равенство не выполняется ни для каких значений a.

7. ШКОЛЬНИКИ

«**Задача**». Десять школьников по окончании 10 класса решили поступать либо на мехмат, либо на физфак. Некоторые школьники дружат между собой. Каждый понедельник с момента оконачания 10 класса они созваниваются с друзьями и обсуждают планы. Если большинство друзей некоторого школьника хотят поступать не туда, куда он, то к следующему понедельнику он принимает мнение этого большинства. Докажите, что до окончания школы их мнения устоятся и больше меняться не будут.

«**Решение**». Всего в этой группе 45 пар школьников, из них n пар друзей, которые собираются поступать в разные места. Пусть Петя собирается на физфак, k его друзей на мехмат, а l на физфак, причем $l < k$. После того, как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l. Таким образом, после каждой перемены мнений число n уменьшится на $k - l > 0$ пар. Ясно, что это может происходить не более 45 раз. Значит, за год (52 недели) процесс перемены мнений завершится.

8. ОБЩАЯ ТОЧКА

На уроке была предложена следующая задача:

«При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4}$ ровно одну общую точку?».

Учительница проверила несколько решений. Все, кто взялся за эту задачу, преобразовали выражение: $\dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{(x^2 - 4)^2}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)^2} = (x+2)^2$, а далее рассуждали по-разному.

«**Решение Вани**». Достаточно найти значения k, для которых уравнение $(x+2)^2 = kx$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2 + (4-k)x + 4 = 0$. Его дискриминант $D = (4-k)^2 - 16 = k(k-8)$ равен нулю при $k = 0$ и $k = 8$.

«**Ответ**»: 0; 8.

«**Решение Тани**». Составим уравнение касательной к графику функции $y = (x+2)^2$ в точке $x_0 = 0$. Так как $y(0) = 4$; $y' = 2(x+2)$; $y'(0) = 4$, то уравнение имеет вид: $y - 4 = 4(x - 0) \Leftrightarrow y = 4x + 4$. Эта прямая не может быть задана уравнением вида $y = kx$.

«**Ответ**»: таких значений k нет.

«**Решение Мани**». Изобразим график функции $y = (x+2)^2$ в декартовой системе координат. Из графика видно, что прямая $y = 0$ является касательной к нему.

«**Ответ**»: 0.

«**Решение Ани**». Составим уравнение касательной к графику функции $y = (x+2)^2$ в некоторой точке x_0. Это уравнение имеет вид $y = (2x_0 + 4)(x - x_0) + x_0^2 + 4x_0 + 4$. Подставив в него $(0; 0)$, получим, что $x_0 = 2$. Тогда $y = 0$ и $y = 8x$.

«**Ответ**»: 0; 8.

Прокомментируйте каждое «решение», указав все ошибки и недочеты (если они есть). Приведите верное решение (если оно отсутствует).

9. АЛГОРИТМ

На ЕГЭ по информатике была предложена задача:

«Дана конечная числовая последовательность. Требуется предложить алгоритм поиска двух членов последовательности с наибольшей суммой, причем разность их номеров должна быть не меньше, чем 4.»

Боря, Вася, Гена и Дима предложили такое «решение»: сначала выбрать из этой последовательности несколько самых больших чисел, а затем перебором найти среди них два искомых числа. При этом Боря выбрал 5 наибольших членов последовательности, Вася выбрал 7, Гена — 8, а Дима — 9. Оцените «решение» каждого мальчика и обоснуйте свою точку зрения.

10. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ

На уроке геометрии обсуждался известный факт:

«В треугольнике, отличном от равнобедренного, биссектриса лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины».

Учитель предложил такое рассуждение:

Пусть в таком треугольнике ABC $AC > AB$, тогда представим, что точка C движется по прямой BC. Когда вершина C — «в бесконечности», то «медиана», проведенная из вершины A, «параллельна» BC, а «биссектриса», проведенная из вершины A, пересекает BC, поэтому она лежит между медианой и высотой. При перемещении точки C вдоль прямой BC по направлению к точке B медиана не может совпасть с высотой, так как в этом случае AC должно равняться AB. Следовательно, биссектриса по-прежнему будет лежать между медианой и высотой.

1) Оцените строгость рассуждений, исправьте ошибки и недочеты (если они есть), допишите необходимые подробности.

2) Стали бы Вы использовать такое рассуждение на уроке и почему?