Департамент образования г. Москвы
Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
журнал «Математика» ("Первое сентября")
Математический факультет Московского Педагогического Государственного Университета
и Московская ассоциация учителей математики
при поддержке благотворительного фонда «ПЕРИ» Зиявудина Магомедова

Москва 25 сентября 2016 года

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:

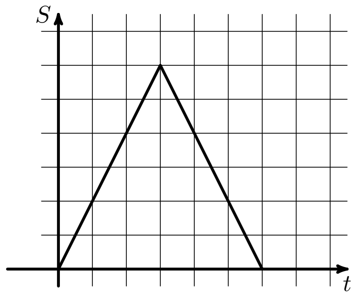
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).

№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа (с 10.00 до 14.30).

I. Решите задачи.

1. Мистер Твистер прогуливался с собакой и бросал ей палку на фиксированное расстояние. Сначала он бросил палку по ходу своего движения. После того, как собака принесла ему палку, он остановился, закурил и бросил палку второй раз. Известно, что за палкой собака бежит в два раза быстрее, чем с палкой в зубах. На графике изображена зависимость расстояния от времени между Твистером и собакой за то время, когда он шел (с постоянной скоростью). Изобразите аналогичную зависимость за период времени, когда он стоял и курил, и поясните свое решение.



2. Решите уравнение: $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=7$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, лежащим внутри четырёхугольника. Сумма углов AOB и COD равна $180°$. Из точки O опущены перпендикуляры на каждую сторону четырёхугольника. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров равна полупериметру $ABCD$.

4. Тетраэдр. В боковых гранях тетраэдра провели по две высоты из вершин при основании тетраэдра. Затем в плоскостях боковых граней провели прямые, соединяющие основания этих высот. Докажите, что полученные три прямые параллельны одной плоскости.

5. Задачи для олимпиады. При составлении олимпиады для каждой из параллелей 5–11 классов требуется подготовить по 15 задач, при этом у любых двух параллелей может быть не более пяти общих задач. Какое наименьшее количество задач нужно подготовить?

II. Методический блок.

6. Тождество. На уроке в 7 классе было доказано тождество $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

«А вторую скобку можно разложить на множители?» — спросил любопытный Вася.

«Нет, нельзя», — ответила учительница.

«А почему?» — не унимался Вася.

а) Как бы Вы на месте учительницы объяснили Васе (и другим семиклассникам), почему выражение a^2-ab+b^2 не раскладывается на множители?

б) Приведите другой вариант объяснения, уместный для более старших классов.

7. Иррациональное число. Ученик привел Вам следующее доказательство того, что $\sqrt{5}$ — иррациональное число.

Будем доказывать методом «от противного». Предположим, что $\sqrt{5}=\dfrac{n}{k}$, где $\dfrac{n}{k}$ — несократимая дробь. Тогда, возводя обе части в квадрат, получим, что $5k^2=n^2$, то есть число n^2 делится на k^2. Отсюда $n\cdot n=n^2$ делится на k, причем k взаимно просто с одним из сомножителей (из-за того, что дробь несократима), поэтому другой сомножитель делится на k. Итак, n делится на k, что противоречит предположению о том, что дробь несократима.

Оцените и наиболее полно прокомментируйте это доказательство.

В заданиях №8 и №9 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки, сделав подробные пояснения, а затем приведите верное решение.

8. Очередь. «Задача». Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите вероятность того, что А стоит первым, если известно, что Б стоит в очереди позже А.

«Ответ»: 1/3.

«Решение». Б стоит позже А в стольких же случаях, в скольких и А стоит позже Б, то есть, все 24 способа выстроить в ряд 4 человек разбиваются на две равные группы по 12 — в половине А раньше Б, в половине — Б раньше А. Условная вероятность того, что А стоит первым при заданном условии, равна доле тех случаев, когда А — первый среди тех 12 случаев, когда А стоит раньше Б. Но, кроме Б, у нас есть 3 человека — А, В и Г, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью. То есть, доли случаев, когда первый — А, когда первый — В и когда первый — Г, равны, поэтому искомая вероятность равна 1/3.

9. Параметр. «Задача». При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) такая, что $ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$?

«Ответ»: при любых $a \neq 0$ и $a \neq 2$.

«Решение». Если $a = 0$, то уравнение примет вид: $2y^2 + 4y + 2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любая пара вида $(x; -1)$, поэтому $a = 0$ следует исключить.

Если $a \neq 0$, то уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x: $ax^2 + 2a(2y - 1)x + (3a+2)y^2 + (4-6a)y + 2 = 0$. Условие задачи может быть выполнено только в том случае, когда дискриминант этого уравнения равен нулю. Вычислим его: $D = 4a^2(2y-1)^2 - 4a((3a+2)y^2 + (4-6a)y + 2)$. $D = 0$, если $a(2y - 1)^2 = (3a + 2)y^2 + (4 - 6a)y + 2$.

Преобразуя полученное равенство, приведём его к виду $(a - 2)(y + 1)^2 = 0$. Если $a = 2$, то $D = 0$ при любом значении y, то есть снова получится бесконечно много пар, значит, $a = 2$ также следует исключить.

Если же $a \neq 2$, то $y = -1$, тогда $x = 3$, то есть исходному равенству удовлетворяет единственная пара $(3; -1)$.

10. Биссектриса. На уроке геометрии была предложена задача: «В треугольнике ABC: $AB = 3$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60°$. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной к стороне BC».

Одним из учеников было предъявлено следующее решение.

Пусть $AD = L$ — искомая биссектриса. По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \times \cos\angle BAC = 27$; $BC = 3\sqrt{3}$. По свойству биссектрисы треугольника: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Обозначив длину BD через x, получим уравнение $\frac{x}{3\sqrt{3} - x} = \frac{3}{6}$, откуда $x = \sqrt{3}$. По теореме косинусов из треугольника ABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD$. Подставив известные значения, получим квадратное уравнение $L^2 - 3\sqrt{3}L + 6 = 0$. Его корни: $L_1 = \sqrt{3}$; $L_2 = 2\sqrt{3}$. Таким образом, длина биссектрисы равна $\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$.

1) Предложите как, не приводя других способов решения, объяснить ученику:

а) что в этой задаче не может быть двух ответов;

б) какой из двух ответов является верным.

2) Каков геометрический смысл «постороннего» ответа?

3) Приведите другой способ решения этой задачи.