Департамент образования г. Москвы

Центр педагогического мастерства

Московский Центр Непрерывного Математического Образования

журнал «Математика»

Математический факультет Московского Педагогического Государственного Университета

Российская и Московская ассоциация учителей математики

Москва 24 сентября 2017 года

XIV Творческий конкурс учителей математики

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 5 часов (с 10.00 до 15.00).

I. Решите задачи.

1. Траволатор. Васе требуется преодолеть фиксированное расстояние в аэропорту. Он идет с постоянной скоростью сначала пешком, а потом продолжает движение, вступив на траволатор (горизонтальный эскалатор), скорость которого также постоянна. По ходу движения ему потребовалось остановиться и завязать шнурок. На каком из двух участков это разумнее сделать, чтобы общее время движения было меньше? (*Время завязывания шнурка меньше, чем время, которое тратится на безостановочное движение по любому из двух участков.*)

2. Сравните без помощи калькулятора: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ и $\lg 999$.

3. Композиция. Функция $f(x)$ определена для всех действительных x и $f(f(x)) = kx + b$ $(k \neq 0)$. Обязательно ли: а) $f(x)$ — линейная; б) $f(x)$ — обратимая?

4. ГМТ. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AMB, BMC и CMA, равны.

5. Тетраэдр. Существует ли тетраэдр, который можно разрезать по ребрам так, чтобы его разверткой оказался треугольник со сторонами 3, 4 и 5?

II. Методический блок.

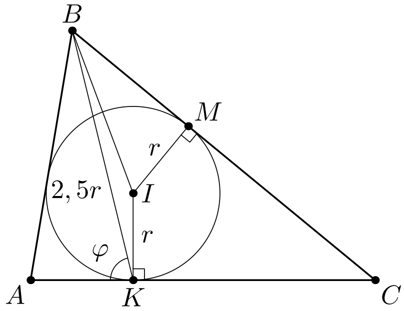
В заданиях №№6–8 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. Лжецы. «Задача». На острове живут два племени: рыцари и лжецы (каждый знает, кто из какого племени). Сто жителей встали в круг. Каждый из них ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Лжец ли ваш правый сосед?». Ответов «Да» оказалось столько же, сколько лжецов. Какое наибольшее количество лжецов могло быть в круге?

«Ответ»: 50 лжецов.

«Решение». *Оценка.* По кругу чередуются группы из подряд стоящих лжецов и рыцарей. Ответ «Да» возникает только в парах лжец–рыцарь или рыцарь–лжец на стыке групп. Количество пар равно количеству ответов «Да», что по условию равно количеству лжецов. Значит, каждый лжец входит ровно в одну пару, пары не пересекаются, и поэтому их не более пятидесяти.

Пример. Чередуются рядом стоящие пары лжецов и рыцарей. «Да» ответили все, чей сосед справа из другого племени.



7. Угол. «Задача». В треугольнике ABC угол B равен 60°. Вписанная в него окружность касается стороны AC в точке K. Найдите синус угла между прямыми AC и BK, если длина BK в 2,5 раза больше, чем радиус вписанной окружности.

«Ответ»: 0,65.

«Решение». Пусть I — центр вписанной окружности, r — ее радиус, M — точка ее касания со стороной BC (см. рис.). Так как $\angle MBI = 30^\circ$, то $BI = 2r$. Пусть $\angle AKB = \varphi$, тогда $\angle IKB = 90^\circ - \varphi$. Учитывая, что $BK = 2{,}5r$, из треугольника IKB по теореме косинусов получим: $4r^2 = r^2 + 6{,}25r^2 - 5r^2\cos(90^\circ - \varphi)$. Тогда $\sin\varphi = 0{,}65$.

8. Букеты. «Задача». 8 марта каждая из n учительниц пришла в школу с одним цветком. При этом оказалось, что все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все имеющиеся у неё цветы или их часть. Нельзя дарить букет, если букет, состоящий из точно тех же цветов, уже кому-то дарили. Какое наибольшее количество букетов могло быть подарено? (*Один цветок — это тоже букет.*)

«Ответ»: $2^n - 1$ букет.

«Решение». Всего из n цветков можно составить $2^n - 1$ различных букетов. Докажем индукцией по n, что все эти букеты могут быть подарены, и при этом в конце у каждой учительницы снова окажется по одному цветку.

База индукции ($n = 2$). Пусть первая учительница принесла розу, а вторая — тюльпан. Тогда первая дарит второй розу, затем вторая первой — оба цветка, а затем первая дарит второй тюльпан.

Шаг индукции (от n к $n+1$). Пусть первая учительница принесла розу. Сначала она стоит в стороне, а все остальные учительницы дарят друг другу всевозможные букеты без розы согласно алгоритму для n. Единственная поправка: последний букет из одного цветка (скажем, тюльпана) дарится первой учительнице. Далее тюльпан с розой склеиваются в один цветок, и снова n учительниц, у которых есть по одному цветку, дарят их друг другу согласно алгоритму для n. В конце учительница с цветком «роза-тюльпан» дарит розу учительнице без цветка, и теперь подарено $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ букетов, и у каждой учительницы ровно по одному цветку.

9. Сумма цифр. На контрольной работе была предложена задача: «Можно ли нечетное число N представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?». Значение N варьировалось в зависимости от варианта. Для $N = 197$ учениками были предложены такие решения.

«Решение Ани». Попробуем представить число 197 в виде суммы двух чисел, начиная с суммы $196 + 1$. Видим, что суммы цифр данных чисел не равны. Теперь будем отнимать от первого числа по единице и прибавлять единицу ко второму, чтобы сумма сохранялась. Увидим, что как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17. Пусть в одном из чисел суммы сумма цифр равна m, тогда сумма цифр второго числа $17 - m$. Они равны, если $m = 17 - m$, откуда получаем, что $m = 8{,}5$. Но m целое, следовательно, получили противоречие. Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

«Решение Вани». Пусть $197 = \overline{xyz} + \overline{ab}$ (понятно, что получить 197, складывая два трехзначных числа, невозможно, а сумма 98 и 99 не обладает требуемым свойством). Тогда $197 = 100x + 10(y + a) + (z + b)$. Откуда получаем, что $x = 1$, $y + a = 9$, $z + b = 7$. Значит, одно из чисел y и a нечетно, а другое — четно. Аналогично, для чисел z и b. Если суммы цифр слагаемых равны, то $x + y + z = a + b$, то есть $x + y + z - a - b = 0$. Но алгебраическая сумма трех нечетных и двух четных чисел не может быть равна нулю. Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

а) Прокомментируйте каждое из решений и полученный ответ, указав все ошибки и неточности (если они есть).

б) Укажите четыре трехзначных значения N, которые Вы бы выбрали для такой задачи с тем, чтобы во всех вариантах был ответ «нельзя».

в) Обоснуйте Ваш выбор.

10. Уравнения. Иногда полезно предлагать старшеклассникам алгебраические уравнения с бесконечным множеством корней. Составить уравнение, множеством корней которого является отрезок, можно, например, так. Рассмотрим функцию $f(x)$ и числа $a < b$. Тогда уравнению $|f(x) - a| + |f(x) - b| = b - a$ удовлетворяют те и только те значения x, для которых $a \leqslant f(x) \leqslant b$. Например, взяв $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$, получим уравнение $|x + 1| + |x - 1| = 2$, множеством решений которого является отрезок $[-1; 1]$. Можно составить уравнение и посложнее.

а) Докажите, что множеством решений уравнения $\sqrt{x - \sqrt{6x - 9}} + \sqrt{x + \sqrt{6x - 9}} = \sqrt{6}$ является отрезок.

б) Покажите, что это уравнение имеет вид $|f(x) - a| + |f(x) - b| = b - a$, указав a, b и $f(x)$ в явном виде.

в) Докажите, что если x — любая внутренняя точка отрезка, о котором идёт речь в пункте а), то $\dfrac{\sqrt{6x - 9} + 3}{\sqrt{x + \sqrt{6x - 9}}} + \dfrac{\sqrt{6x - 9} - 3}{\sqrt{x - \sqrt{6x - 9}}} = 0$.