Департамент образования г. Москвы
Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
журнал «Математика»
Математический факультет Московского Педагогического Государственного Университета
Российская и Московская ассоциация учителей математики

Москва 23 сентября 2018 года

XV Творческий конкурс учителей математики

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).
Продолжительность конкурса — $4,5$ часов (с 10.00 до 14.30).

I. Решите задачи.

1. Тест. В тесте к каждому вопросу указано 5 вариантов ответа. Когда двоечнику удается списать, он отвечает верно, в противном случае — наугад (то есть среди несписанных ответов — пятая часть верных). За год двоечник верно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

2. Функция. Графиком функции $y = f(x)$ является прямая, не параллельная оси OX. Найдите эту функцию, если известно, что для всех x выполняется равенство $f(2018 - f(x)) = 2018 - 2f(x)$.

3. Домино. Можно ли на доску размером 10×10 клеток положить 9 костяшек домино размером 1×2 так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали они занимали нечётное количество клеток?

4. Тетраэдр. Биссектрисы двух плоских углов при вершине тетраэдра взаимно перпендикулярны. Найдите углы, которые каждая из этих биссектрис образует с биссектрисой третьего плоского угла тетраэдра при той же вершине.

5. Система. Решите в натуральных числах систему: $\begin{cases} xy = zt, \\ x^y = z^t. \end{cases}$

II. Методический блок.

6. Процент. «Задача». В 6 «А» классе учится 24 человека, что с точностью до десятых процента составляет 6,9% от количества учеников школы. В 8 «А» классе учится 33 человека. Какой процент (с точностью до десятых) всех учеников школы учится в 8 «А» классе?

«Ответ»: 9,5%.

«Решение». Запишем в виде таблицы условие задачи и составим пропорцию:

24 человека	6,9%
33 человека	x%

$\dfrac{x}{6{,}9} = \dfrac{33}{24}$, $x = \dfrac{33 \cdot 6{,}9}{24}$, $x = 9{,}4875$.
После округления до десятых получаем ответ 9,5%.

В изложенном выше тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

7. Уравнение. На уроке в 11 классе было предложено решить уравнение $9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$. Школьники предложили два различных способа решения, начинающиеся одинаково. Пусть $\sqrt{x} = y \geqslant 0$, тогда уравнение примет вид: $9 \cdot 12^y = 6^{y^2}$.

Первый способ. $9 \cdot (2 \cdot 6)^y = (6^y)^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^y = 6^y \Leftrightarrow 3^y = 3^2 \Leftrightarrow y = 2$. Тогда $x = 4$.

Второй способ. Разложим числа 9, 12 и 6 на простые множители: $3^{2+y} \cdot 2^{2y} = 2^{y^2} \cdot 3^{y^2}$. Из единственности разложения числа на простые множители следует, что $2 + y = y^2$ и $2y = y^2$. Решением этой системы является $y = 2$. Следовательно, $x = 4$.

а) Если Вы считаете, что в этих решениях есть ошибки, то укажите их.
б) Какой способ решения предложите Вы?
в) Почему оба способа решения привели к одному и тому же ответу?

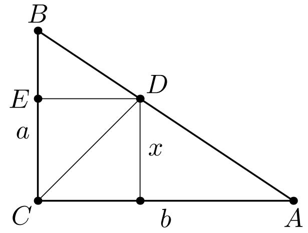
о по

8. Вписанный квадрат.

Учитель предложил классу следующую задачу.

«Задача». В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника. Найдите сторону квадрата.

Ученик, вызванный к доске, предложил такое решение.



Введем обозначения так, как показано на рисунке. Так как диагональ CD квадрата является биссектрисой угла C, то по свойству биссектрисы и свойству пропорции получим: $\dfrac{a}{BD} = \dfrac{b}{AD} = \dfrac{a+b}{BD+AD} = \dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Отсюда $BD = \dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$. Из треугольника BDE: $x^2 + (a-x)^2 = BD^2 = \dfrac{a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}$. Решая это уравнение, получим: $x = \dfrac{ab}{a+b}$ или $x = \dfrac{a^2}{a+b}$.

Тогда учитель задал классу такие вопросы:

1) Каким образом можно, не решая эту задачу, понять количество возможных ответов?

2) Как довести до конца решение на доске и выбрать из двух ответов верный?

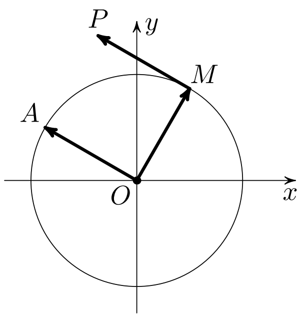
3) Объясните, какой геометрический смысл имеет второй ответ и объясните, почему он был получен.

4) Придумайте решение, которое не приведёт к постороннему ответу.

Ответьте на эти вопросы.

9. Производные.

На уроке был предложен следующий "вывод"производных синуса и косинуса.



Пусть точка M движется со скоростью 1 в положительном направлении по единичной окружности с центром в начале координат и радиусом 1 (см. рисунок). Тогда, согласно определению тригонометрических функций, $M(\cos t; \sin t)$ в момент времени t. Вектор $\overrightarrow{MP}$ мгновенной скорости точки M направлен по касательной к окружности в точке M, поэтому он перпендикулярен OM. Отложим этот вектор от точки O: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MP}$. Тогда $OA = 1$ (так как точка движется со скоростью 1), то есть точка A лежит на окружности. При этом $OA \perp OM$, поэтому $A\left(\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right); \sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Используя формулы приведения, получим: $A(-\sin t; \cos t)$. Следовательно, $\overrightarrow{MP}(-\sin t; \cos t)$. Но координаты мгновенной скорости — это производная координаты точки, значит, $(\cos t)' = -\sin t$ и $(\sin t)' = \cos t$.

а) Содержит ли этот текст (сам по себе) какие-либо ошибки или неточности? Если да, то укажите их.

б) Будем считать, что ошибки, если они есть, исправлены. Перечислите, что, на Ваш взгляд, надо обосновать и/или определить, чтобы этот «вывод» стал математически строгим.

в) Стандартный вывод производной синуса опирается на «первый замечательный предел». Обошлись ли мы без предела в данном случае?

10. Одинаковые ответы. Рассмотрим две задачи:

Задача 1. Каким числом способов можно представить число 16 в виде суммы слагаемых 1 и 2? Представления, отличающиеся порядком слагаемых, — разные.

Задача 2. Вдоль аллеи расположены 15 скамеек. По аллее гуляют мизантропы. Иногда некоторые из них отдыхают на скамейках. Но на то они и мизантропы, чтобы не садиться не только вдвоём на одну и ту же скамейку, но даже и на соседнюю с занятой кем-то. Сколькими способами можно из всех 15 скамеек выбрать несколько таких, на которые согласятся сесть мизантропы? Можно выбрать и ноль скамеек.

а) Не решая ни одну из задач, докажите, что ответы у них одинаковые.

б) У двух задач ответы могут совпасть по разным причинам. Иногда это случайность, тогда говорить не о чем. Иногда задачи очевидно одинаковые (например, можно складывать яблоки с грушами, а можно овец с козами), тогда говорить тоже не о чем. Но иногда связь настолько глубокая, что стоит обсудить с учениками совпадение ответов в паре задач до или даже вместо решения этих задач.

Приведите две пары таких задач из разных разделов математики. Объясните в каждом случае причину совпадения ответов.