Департамент образования г. Москвы

Центр педагогического мастерства

Московский Центр Непрерывного Математического Образования

журнал «Математика»

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Российская и Московская ассоциации учителей математики

Москва 22 сентября 2019 года

XVI Творческий конкурс учителей математики

Продолжительность конкурса — 5,5 часов (с 10.00 до 15.30).

I. Решите задачи.

1. Вычисление корней. Ученик предложил новый способ для вычисления корней и привёл два примера: $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$ и $\sqrt{12\frac{12}{143}} = 12\sqrt{\frac{12}{143}}$. Приведите еще один аналогичный пример.

2. Ребус. Сколько решений имеет ребус **П** $<$ **О** $<$ **Д** $<$ **У** $<$ **М** $<$ **А** $>$ **Й**, где разными буквами обозначены разные цифры?

3. Сумма. Пусть $P(n)$ — произведение ненулевых цифр числа n. Найдите сумму: $P(1)+P(2)+\ldots+$ $+\,P(2019)$.

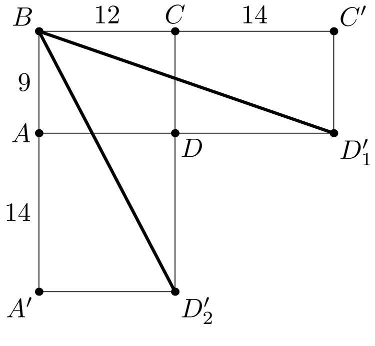
4. Одиночные точки. Пусть $Q_n(x)$ — многочлен степени n. Назовем точку x_0 двойственной, если существует такая точка x_1, что касательные, проведенные в точках графика $y = Q_n(x)$ с абсциссами x_0 и x_1, взаимно перпендикулярны. В противном случае назовем точку x_0 одиночной. Докажите, что у любого многочлена существуют одиночные точки, причём при чётном n количество одиночных точек конечно, а при нечётном n — бесконечно.

5. Серединный перпендикуляр. На окружности зафиксированы две точки A и B. Точка C движется по окружности так, что треугольник ABC — остроугольный. Точки E и F — проекции середины отрезка AB на прямые AC и BC. Докажите, что серединный перпендикуляр к EF проходит через фиксированную точку.

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а затем приведите верное решение.

6. Параллелепипед. «Задача». Муха ползет по поверхности прямоугольного параллелепипеда с основанием 9×12 и высотой 14 из вершины нижнего основания в противоположную вершину верхнего основания. Докажите, что длина её пути будет не меньше чем 25,5.



«Решение». Пусть муха ползет из вершины B параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ в вершину D'. Если она будет ползти по ребрам параллелепипеда, то длина ее пути составит $9 + 12 + 14 > 25{,}5$.

Пусть муха ползет по граням. Рассмотрим развертку трех граней параллелепипеда (см. рисунок). Кратчайший путь мухи будет соответствовать одному из отрезков BD'_1 или BD'_2. Но ${BD'_1}^2 = 9^2 + 26^2 = 757 >$ $> 650{,}25 = 25{,}5^2$ и ${BD'_2}^2 = 12^2 + 23^2 = 673 > 650{,}25 = 25{,}5^2$, что и требовалось доказать.

7. Сумма и разность. «Задача». На доске записаны числа 1, 2, …, 101. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы для любых двух оставшихся чисел a и b сумма $a+b$ не делилась на $a-b$?

Ответ: 75.

«Решение.» Если для двух оставшихся чисел $a > b$ выполнено $a - b = 1$ (то есть эти числа соседние), то условие, очевидно, нарушается. Таким образом, среди оставшихся чисел нет соседних. Следовательно, каждое второе число нужно вычеркнуть. Большее количество чисел останется, если мы вычеркнем четные числа и оставим нечетные: 1, 3, 5, …, 101. Далее, если для двух оставшихся чисел $a > b$ выполнено $a - b = 2$, то $a + b$ делится на $a - b$, что противоречит условию. Тем самым, мы должны из ряда 1, 3, 5, ..., 101 вычеркнуть каждое второе число. Оставшийся ряд из 26 чисел: 1, 5, 9, ..., 101 удовлетворяет условию, поскольку любая разность $a - b$ делится на 4, но никакая сумма не делится на 4 (она дает остаток 2 при делении на 4).

8. Площадь. Школьник доказывает формулу площади параллелограмма . Сначала он доказывает соответствующую формулу площади треугольника, а потом разбивает параллелограмм диагональю на два равных треугольника. Доказывая формулу для треугольника, он опускает высоту, которая лежит внутри треугольника, после чего опирается на формулу площади прямоугольника. Вопрос экзаменатора: «А если высота лежит вне треугольника?» Тогда школьник доказывает, что найдется высота треугольника, которая лежит внутри него.

Доказал ли школьник формулу площади параллелограмма? Обоснуйте.

9. Кефир.

Ученик рассказал учителю задачу, полученную им на олимпиаде, привёл своё решение и спросил, верно ли оно.

Задача. Паниковскому приснилось, что он получил 1000000 рублей на блюдечке с голубой каемочкой. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и сразу на все имеющиеся деньги купил кефир. В дальнейшем он поступал так же до тех пор, пока денег хватало хотя бы на одну бутылку. При этом он заметил, что между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Паниковский во сне?

Ответ: 166666.

Решение ученика. Надо проводить расчёт в пустых бутылках, так как в этой «валюте» цена кефира не изменяется. Кефир «нетто» стоит 6 бутылок, так что полученных денег хватит на $1000000 : 6 = 166666$ бутылок кефира и еще 4 пустых бутылки останутся.

Обоснованно ответьте на вопросы а) и б) и выполните задание в).

а) Как, не производя вычислений, объяснить ученику, что его решение неверное?

б) Можно ли без дополнительных вычислений, а только на основе соображений, приведённых в пункте а), наверняка сказать, верен ли ответ, полученный учеником?

в) Учитель мог сказать ученику: «Если ты рассуждал верно, то, получив 1000 рублей, Паниковский смог бы купить 166 бутылок кефира. А теперь подсчитай, сколько он смог бы купить на самом деле». Приведите верное решение задачи в таком (упрощённом) виде.

10. Неравенство. Придумайте неравенство, решением которого является объединение полуинтервала и отдельной точки, а в процессе решения необходимо сравнить два иррациональных числа с одинаковой целой частью. Одно число — корень полного квадратного уравнения с целыми коэффициентами, а второе должно иметь вид $\log_a b$. Запишите решение этого неравенства.