Департамент образования г. Москвы
Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
журнал «Математика»
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Российская и Московская ассоциации учителей математики

Москва 20 сентября 2020 года

XVII Творческий конкурс учителей по математике

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).
Продолжительность конкурса — 5,5 часов (с 10.00 до 15.30).

I. Решите задачи.

1. Социальная дистанция. Два человека стоят посередине полосы шириной 2 метра на расстоянии 5 метров друг от друга. Смогут ли они поменяться местами, пройдя в сумме не более двенадцати метров и соблюдая социальную дистанцию (в любой момент расстояние между ними не должно быть меньше, чем 1,5 метра, и они всегда должны находиться внутри полосы)?

2. Функция. Петя придумал новую функцию $f(x) = \#x\#$, определенную для всех x, кроме нуля. По определению $\#x\# = n$, если $n \leq \dfrac{1}{|x|} < n+1$ и n — целое число. Изобразите на координатной плоскости и опишите словами множество всех точек, координаты которых удовлетворяют условию: $\#x\# = \#y\#$.

3. Неравенство. Для положительных x, y и z докажите неравенство:

$$4xyz(x+y+z) \leq (y+z)^2(x+z)^2.$$

4. Прогрессия. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия состоит из положительных рациональных чисел. Ее первый член — не натуральное число, а сумма — натуральное. Может ли натуральное число быть членом такой прогрессии?

5. Пятиугольник. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Точки M и H — середины сторон BC и CD соответственно. Луч AM пересекает диагональ BD в точке G, а описанную окружность пятиугольника — в точке F. Докажите, что описанная окружность треугольника CFG касается прямой AH.

II. Методический блок.

6. Эскалатор. В этом задании могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а затем приведите верное решение.

«Задача». В воскресенье Вася прошел по неподвижному эскалатору и насчитал 36 ступенек. В понедельник этот же эскалатор двигался вниз, и Вася спустился по движущемуся эскалатору вниз и сосчитал ступеньки. Во вторник он с той же скоростью поднялся вверх по этому эскалатору и вновь сосчитал ступеньки. Известно, что собственная скорость мальчика всегда в 1,4 раза больше скорости движущегося эскалатора. Сколько ступенек он насчитал в понедельник и во вторник?

«Ответ»: 15 и 90 ступенек соответственно.

«Решение». Пусть x — скорость эскалатора, $1{,}4x$ — скорость Васи. В понедельник скорость движения относительно земли — $2{,}4x$, во вторник — $0{,}4x$. Расстояние фиксировано, значит, время движения обратно пропорционально скорости. В то же время оно прямо пропорционально числу пройденных ступеней. Получаем, что в понедельник Вася прошел $36 : 2{,}4 = 15$ ступеней, а во вторник — $36 : 0{,}4 = 90$ ступеней.

7. Параллелепипед. Для базы ЕГЭ предложена типовая задача (см. ниже).Для её "клонирования"в другие варианты автор предлагает вместо чисел 4, 5 и 7 использовать любые положительные числа.

«Задача». Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 7. Найдите наибольшую площадь треугольного сечения этого параллелепипеда.

«Ответ»: $4\sqrt{6}$.

«Решение». Из всех треугольных сечений наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через концы трёх ребер, выходящих из одной вершины. Сторонами этого треугольника и являются диагонали граней, значит, по формуле Герона его площадь равна $\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1} = 4\sqrt{6}$.

1) Прокомментируйте корректность условия «задачи» и её «решения».

2) Согласны ли Вы с мнением автора по «клонированию»? Обоснуйте.

8. Свойство функции. Семиклассник Ваня доказал утверждение: «Если $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a+b}{a-b}$, то $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c+d}{c-d}$», используя характеристическое свойство пропорции. Его старший брат десятиклассник Саша, заглянув в Ванину тетрадь, понял, что этот факт следует из некоторого свойства функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Объясните, какое свойство функции имел ввиду Саша и каким образом из него следует указанный факт.

9. Корни уравнения.

«Задача». Найдите количество корней уравнения $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} = 1$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

«Решение ученицы». $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x$; $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1 - \operatorname{tg} x$; $\operatorname{tg} 2x(1 + \operatorname{tg} x) = 1 - \operatorname{tg} x$; $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}(1+\operatorname{tg} x) = 1 - \operatorname{tg} x$; $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1 - \operatorname{tg} x$; $2\operatorname{tg} x = (1-\operatorname{tg} x)^2$. Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда $t^2 - 4t + 1 = 0$; $t = 2 \pm \sqrt{3}$; отмечаем на единичной окружности.

«Ответ»: 4 корня.

«Решение учительницы». $\operatorname{tg} 3x = 1$; $3x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; отмечаем на единичной окружности.

«Ответ»: 6 корней.

Вопрос учительницы: «В какой момент ученица потеряла два корня?». Помогите ей полностью разобраться в решениях.

10. Сколькими способами? Учитель дал на кружке задачу: «В поход пошли 7 мужчин и 4 женщины. Сколькими способами они могут так построиться для прохождения сложного участка, чтобы направляющим и замыкающим шли мужчины, и две женщины не следовали друг за другом?»

Ученик начал решать так: «Сначала построим женщин. Это можно сделать 4! способами. Потом надо поставить каких-то мужчин на пять мест: первое, последнее и в промежутках между женщинами. На первое из этих мест есть 7 кандидатов, на второе 6 и т. д. Поставить всех женщин и пятерых мужчин можно $4!\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ способами. Теперь поставим двух оставшихся мужчин ....»

В этом месте ученик запнулся и не смог продолжить решение.

Какие действия учителя Вы считаете оптимальными:

1. указать на уже сделанные ошибки (если они есть);
2. помочь довести решение до конца (в этом случае дополните решение; а перечислять наводящие вопросы не требуется);
3. пояснить, что решение плохое (почему?) и постараться подвести к верному решению (к какому)?

Из трёх возможностей необязательно выбирать ровно одну.