Департамент образования г. Москвы
Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
журнал «Математика»
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Российская и Московская ассоциации учителей математики

Москва 19 сентября 2021 года

XVIII Творческий конкурс учителей по математике

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часов (с 10.00 до 14.30).

I. Решите задачи.

1. При выходе с участков голосования за присвоение Пятому артиллерийскому заводу имени А. С. Пушкина был произведён опрос. 50% проголосовавших сказали, что голосовали «за», 20% сказали, что голосовали «против», а остальные не стали отвечать как они голосовали. На сайте завода опубликованы данные, что согласно предварительному опросу «за» проголосовало примерно 71,4% участников. Как Вы думаете, каким образом получен этот результат?

2. Число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево. Сколько 13-значных палиндромов делится на 3?

3. Даны четыре концентрические окружности с радиусами 1, 2, 3 и 4. Существует ли квадрат, вершины которого лежат по одной на каждой окружности?

4. Найдите все такие натуральные a, b и c, что все корни уравнений $x^2-2ax+b=0$, $x^2-2bx+c=0$, $x^2-2cx+a=0$ являются натуральными числами.

5. При каких значениях параметра a уравнение $(a+2)^2x^4+2(a^2+2a)x^3+8x-a^2-a+3=0$ имеет единственный корень?

II. Методический блок.

В заданиях NN6–9 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

6. «Задача». Каждому ребёнку, пришедшему на ёлку, Дед Мороз подарил по 10 конфет, 3 мандарина и 2 шоколадки, а Снегурочка — по 12 конфет, 4 мандарина и 4 шоколадки. Они раздали 400 конфет и шоколадок вместе взятых. А сколько мандаринов?

«Ответ»: 100 мандаринов.

«Решение». Из условия следует, что Дед Мороз и Снегурочка выдали детям в 4 раза больше конфет и шоколадок, чем мандаринов. Поэтому мандаринов подарено $400:4=100$.

7. «Задача». Атос играл в кости с англичанином. Они по очереди (начинал англичанин) бросали игральную кость, на которой выпадает от 1 до 6 очков. Атосу, утомлённому долгим сидением в погребе, не везло: среди каждых трёх его последовательных бросков выпадала хотя бы одна двойка, а среди каждых пяти последовательных бросков — хотя бы одна единица. Наоборот, за каждые шесть последовательных бросков англичанин выбрасывал не менее четырёх шестёрок. Выигрывал тот, кто первым набрал не менее, чем 58 очков. Мог ли Атос выиграть?

«Ответ»: нет.

«Решение». Найдем наибольшее количество очков, которое мог набрать Атос после пятнадцати бросков. Среди них пять двоек и три единицы, поэтому, даже если в каждом из остальных семи бросков выпадали шестёрки, то он набрал не больше, чем $5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 6 = 55$ очков. Англичанин за первые 12 бросков набрал не меньше, чем $8 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 52$ очка, а за три следующих броска выпала еще хотя бы одна шестерка. То есть он набрал хотя бы 58 очков и выиграл.

8. «Задача». На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка K. В точке K восставлен перпендикуляр к AC, пересекающий BC в точке M. Докажите, что $\angle AMK = \angle ADK$ тогда и только тогда, когда $CK = BM$.

«Решение». Так как $\angle CMK = \angle MCK = 45°$, то $CK = MK$ (см. рис. 8а, б).

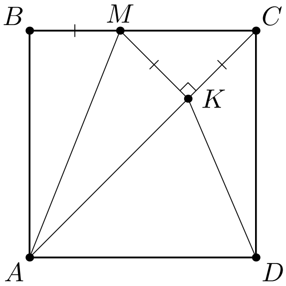

Рис. 8а

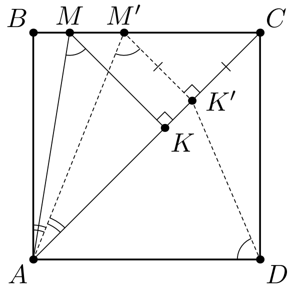

Рис. 8б

1) Если $CK = BM$, то $BM = MK$ (см. рис. 8а). Тогда прямоугольные треугольники ABM и AKM равны (по гипотенузе и катету), значит, $AK = AB = AD$ и $\angle AMK = 0{,}5\angle BMK = 67{,}5°$. Из равнобедренного треугольника DAK получим, что $\angle ADK = (180° - \angle DAK) : 2 = 67{,}5° = \angle AMK$.

2) Пусть $\angle AMK = \angle ADK$, но $CK \neq BM$. Проведем биссектрису угла CAB, которая пересечёт сторону BC в точке M' (см. рис. 8б). Из точки M' опустим перпендикуляр $M'K'$ на диагональ AC. Прямоугольные треугольники ABM' и $AK'M'$ равны (по гипотенузе и острому углу), значит, $AK' = AB = AD$. Тогда по доказанному в пункте а) $\angle AM'K' = \angle ADK$, то есть $\angle AM'K' = \angle AMK$. Но это невозможно, если $\angle M'AK' \neq \angle MAK$. Следовательно, точки M' и K' совпадают с точками M и K соответственно, то есть $CK = BM$.

9. «Задача». Среди всех цилиндров, вписанных в шар радиуса R, найдите цилиндр с наибольшей площадью полной поверхности.

«Ответ»: цилиндр с радиусом основания $R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}$ и высотой $2R\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

«Решение». Пусть r — радиус основания цилиндра, тогда его высота $H = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Площадь полной поверхности цилиндра: $S = 2\pi r(r + H) = 2\pi(r^2 + 2r\sqrt{R^2 - r^2})$.

Рассматривая полученное выражение как функцию $S(r)$, определённую на промежутке $(0; R)$, найдём её производную: $S'(r) = 2\pi\left(2r + 2\sqrt{R^2 - r^2} - \dfrac{2r^2}{R^2 - r^2}\right)$.

Решая уравнение $S'(r) = 0$, после преобразований получим: $5r^4 - 5R^2r^2 + R^4 = 0$. Его положительные корни $r = R\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{10}}$ являются стационарными точками функции $S(r)$. При достаточно малых r цилиндр превращается в «столбик» с маленькой площадью полной поверхности, а при r, близких к R, — в «блинчик», у которого площадь поверхности стремится к $2\pi R^2$. Следовательно, функция сначала возрастает, затем убывает, а потом снова возрастает. Значит, радиус искомого цилиндра является точкой максимума рассматриваемой функции, то есть $r = R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}$. Тогда $H = 2R\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

10. «Задача». Из Барселоны в Парагвай выехал автобус. Через 5 минут из Барселоны по той же дороге выехала маршрутка. Через 10 минут после этого она обогнала автобус и прибыла в Парагвай на 15 минут раньше автобуса. Сколько времени автобус ехал от Барселоны до Парагвая?

«Ответ»: за 1 час.

«Решение». Пусть автобус ехал из Барселоны в Парагвай x минут со скоростью 2 км/мин. Тогда за 15 минут он проехал 30 км. Маршрутка эти же 30 км проехала за 10 минут, поэтому её скорость 3 км/мин. Маршрутка доехала от Барселоны до Парагвая за $x - 20$ минут. Расстояние между Барселоной и Парагваем равно $2x = 3(x - 20)$ км. Из уравнения находим, что $x = 60$.

1. Прокомментируйте «Решение». Верный ответ получен случайно или это предсказуемо? Почему?

2. Приведите своё решение данной задачи.

3. Приведите пример задачи совсем другого типа (не на движение и не на работу) с таким же недостатком в «Решении», но верным ответом. Поясните, как исправить такое «Решение».