Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
факультет математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Москва 24 сентября 2023 года

XX Творческий конкурс учителей по математике

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа (с 10.00 до 14.30).

I. Решите задачи.

1. На курсе 10 учебных групп, в каждой из которых по 20 студентов. Все 200 студентов произвольным образом стали по кругу. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

2. Дима придумал новое свойство функций. **Определение.** Функция $f(x)$ называется *неспешной* на данном промежутке, если для любых различных точек x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство $|x_1 - x_2| > |f(x_1) - f(x_2)|$. Для функции $f(x) = x^2$ найдите максимальный интервал *неспешности* (*который не содержится ни в каком другом интервале неспешности*).

3. Найдите все такие числа N, которые можно представить в виде $N = a^2 + ab + b^2$, но нельзя представить в виде $N = c^2 - cd + d^2$, где a, b, c и d — натуральные числа.

4. Найдите все такие натуральные k и m, что $(k+1)^k = 2k^m + 3k + 1$.

5. В треугольнике ABC через точку F проведены чевианы AM, BL, CK, причем $\angle CBL = \angle BAM$, $\angle BCK = \angle CAM$. Окружности, описанные около треугольников BML и CMK, пересекают прямую AM в точках P и Q. Докажите, что A — середина отрезка PQ.

II. Методический блок.

В заданиях NN6–9 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

6. «Задача». Спортивный магазин провёл акцию «Не имей сто рублей, а имей сто друзей». Она заключалась в следующем: если покупатель, который приобрёл велосипед «Дружок», привёл 5 друзей, которые приобретали такой же велосипед, то приведшему деньги возвращались. За время проведения акции 25 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые привели ровно по 5 новых покупателей, а остальные 217 не привели ни одного. Сколько участников акции ездят на велосипеде бесплатно?

«Решение». Из условия следует, что 217 — это те, кто не привел друзей, и те, кого привели другие. Пусть x человек привели друзей, y человек не привели друзей. Тогда всего приведено $5x$ друзей. Значит, введённые переменные удовлетворяют системе уравнений: $x + y = 25$; $5x + y = 217$. Вычитая первое уравнение из второго, получим, что $x = 48$. Но это невозможно, так как тогда $y < 0$. Следовательно, задача не имеет решения.

7. «Задача». При всех значениях параметров a и b решите уравнение $a\sin x + b\cos x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

«Ответ»: $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, где $k \in Z$.

«Решение». Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, тогда $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=0,5$, то есть $\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=0,5$, где $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. Следовательно, $\sin(x+\alpha)=0,5$; $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k-\alpha$, где $k\in Z$.

8. «Задача». Положительные числа x, y и z удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=9,\\ z^2+x^2+xz=144,\\ y^2+z^2+yz=196.\end{cases}$ Найдите $x+y+z$.

«Ответ»: $\sqrt{\dfrac{349+\sqrt{10005}}{2}}$.

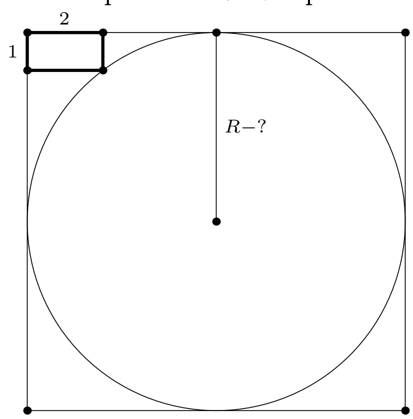
«Решение». Отложим от точки O отрезки $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ так, чтобы углы AOB, BOC, COA были равны по 120°. Из условия, используя теорему косинусов, получим: $AB=3$, $CA=12$, $BC=14$. Повернём вокруг точки A на 60° против часовой стрелки точки O и B. Пусть они перешли в точки O_1 и B_1 ответственно. Тогда треугольники AOO_1 и ABB_1 равносторонние, откуда $\angle COO_1=180^\circ$. Так как $\triangle AOB=\triangle AO_1B_1$, $\angle OO_1B_1=180^\circ$, то точки C, O, O_1 и B_1 лежат на одной прямой, при этом $OO_1=x$, $B_1O_1=y$, следовательно, $CB_1=x+y+z$.

Пусть $\angle BAC=\alpha$. Из теоремы косинусов $\cos\alpha=-\dfrac{43}{72}$, тогда $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3335}}{72}$, $\cos\angle B_1AC=\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{43}{72}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3335}}{72}$, откуда по теореме косинусов $B_1C^2=9+144-72\cdot\cos\angle B_1AC=\dfrac{349+\sqrt{10005}}{2}$.

9. «Задача». На балу никакой юноша не танцевал со всеми девушками, а каждая девушка танцевала хотя бы с одним юношей. Докажите, что среди присутствовавших на балу можно найти двух юношей и двух девушек так, что каждый из этих двух юношей танцевал лишь с одной из этих двух девушек, а каждая из этих двух девушек танцевала лишь с одним из этих двух юношей.

«Решение». Сначала уберем из рассмотрения всех юношей, которые не танцевали ни с одной из девушек. После этого уберем из рассмотрения всех девушек, которые танцевали с каждым из оставшихся юношей. Какие-то девушки после этого останутся, иначе каждый из оставшихся юношей танцевал бы со всеми девушками, что противоречит условию. Выберем из оставшихся девушек ту, которая танцевала с наибольшим количеством юношей, обозначим ее $Д_1$. Какой-то из оставшихся юношей не танцевал с $Д_1$, обозначим его $Ю_2$. При этом $Ю_2$ танцевал хотя бы с одной девушкой, обозначим ее $Д_2$. Тогда $Д_2$ не могла танцевать со всеми юношами, с которыми танцевала $Д_1$, иначе она танцевала бы с большим количеством юношей, чем $Д_1$, что противоречит выбору $Д_1$. Пусть $Ю_1$ — юноша, с которым танцевала $Д_1$, но не танцевала $Д_2$. Тогда $Ю_1$, $Ю_2$, $Д_1$, $Д_2$ образуют искомую четверку.

10. На самостоятельной работе было предложено решить задачу по готовому чертежу (см. рисунок). Ученик предложил решение, в котором сразу записал уравнение $2R-1=(R-2)^2$. После упрощения получил квадратное уравнение, корни которого 1 и 5. Отбросил корень 1 и дал ответ $R=5$.



1) Как мог рассуждать ученик, получая такое уравнение? Постарайтесь найти несколько версий.

2) Предложите решение, использующее более общеизвестный факт школьного курса геометрии и приводящее к равносильному уравнению.

3) Почему корень $R=1$ следовало отбросить? Какой геометрический смысл он мог бы иметь?