Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
факультет математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Москва 22 сентября 2024 года

XXI Творческий конкурс учителей по математике

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (*www.mccme.ru/oluch/*).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа (с 10.00 до 14.30).

I. Решите задачи.

1. Решите уравнение: $x + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} = 4$.

2. В каждом раунде "Своей игры" участвуют три игрока. В полуфинале юбилейного розыгрыша n участников. Каждый играет два раунда так, что его соперниками являются 4 разных игрока, также вышедшие в полуфинал. Найдите все возможные значения n.

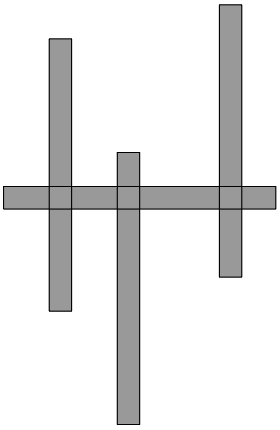
3. Существует ли такая функция f, отличная от постоянной и определённая на $\mathbb{R}$, что для всех действительных x выполняется равенство $f(\sin x) = f(\cos x)$?

4. В треугольнике ABC через центр I вписанной окружности проведена прямая, перпендикулярная AI, которая пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. K — середина IE, F — точка пересечения BE и CK. Докажите, что точки B, I, F и C лежат на одной окружности.

5. В кошельке находятся монеты разного номинала в тугриках. Может ли оказаться, что набрать ими сумму в 2024 тугрика можно ровно 2024 способами?

II. Методический блок.

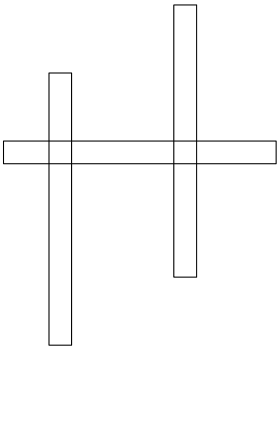
6. В работе для поступающих в 5 класс предлагалась задача:



Накладывая друг на друга одинаковые прямоугольники периметра 46 см, составили две фигуры (см. рисунки). Серая фигура имеет периметр 148 см. Найдите периметр белой фигуры.

Проверяющим попались две нестандартные работы с верными ответами.

Решение Саши:
1) $148 - 46 = 102$ (см) — без целого прямоугольника.
2) $102 : 3 = 34$ (см) — один нецелый.
3) $34 \cdot 2 = 68$ (см) — два нецелых.
4) $68 + 46 = 114$ (см) — периметр белой фигуры.
Ответ: 114 см.



Решение Наташи:
1) $148 : 46 = 3$ (ост 10).
2) $(46 - 10) : 12 = 3$ (см) — ширина.
3) $46 \cdot 3 - 3 \cdot 8 = 138 - 24 = 114$ (см).
Ответ: 114 см.

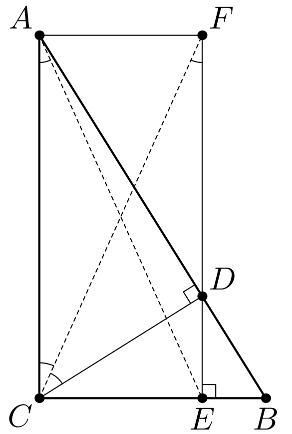
Помогите приёмной комиссии разобраться с каждой работой: решение ребёнка логичное (хотя и не вполне понятно записано) или же верный ответ получен случайно?

В заданиях NN7–9 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

7. «Задача». Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $\text{НОК}(a,b,c) = a+b+c$. Докажите, что среди этих чисел есть чётное.

«Решение». Заметим, что если у данных трёх чисел есть общий делитель, то на него можно разделить обе части равенства. Поэтому можно считать, что числа a, b, c в совокупности взаимно простые. Тогда $\text{НОК}(a,b,c) = abc$. Значит, достаточно доказать, что из равенства $abc = a+b+c$ следует, что хотя бы одно из чисел a, b, c является чётным. Действительно, пусть $a \leqslant b \leqslant c$, тогда $a+b+c \leqslant 3c$, поэтому $ab \leqslant 3$. Если $a = b = 1$, то $c = c+2$, что неверно. А если $ab = 3$, то $a = b = c$, но тогда $ab \neq 3$. Противоречие. Значит, $ab = 2$, поэтому хотя бы одно из этих чисел чётное.

8. «Задача». В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD, а из точки D опущен перпендикуляр DE на катет BC. Найдите угол BAC, если известно, что $AC = CD + DE$ и $\angle CAE = 22^\circ$.



«Ответ:» 46°.

«Решение». Построим прямоугольник $ACEF$ и проведём его диагональ CF (см. рисунок). Тогда $\angle ACF = \angle CFE = \angle CAE$. Так как $FD = FE - DE = AC - DE = CD$, то треугольник CDF равнобедренный и $\angle FCD = \angle CFD = \angle CAE$. Значит, $\angle ACD = \angle ACF + \angle FCD = 2\angle CAE = 44^\circ$, а $\angle BAC = 90^\circ - \angle ACD = 46^\circ$.

9. «Задача». Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Расстояние между каждыми двумя равно a. Найдите площадь параллелограмма, две соседние вершины которого расположены на одной прямой, а две оставшиеся — на двух других прямых.

«Ответ:» $a^2\sqrt{2}$.

«Решение». Данные в условии прямые содержат скрещивающиеся рёбра параллелепипеда, а так как расстояния между каждыми двумя из этих прямых равны, то этот параллелепипед — куб. Пусть это куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а AB, B_1C_1 и DD_1 — указанные прямые, которые попарно перпендикулярны. Если две вершины параллелограмма лежат, например, на прямой AB, то две другие должны лежать на прямой, параллельной AB, то есть на прямой, которая перпендикулярна и B_1C_1, и DD_1. Эта прямая должна пересекать обе указанные прямые, значит, она содержит общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым B_1C_1 и DD_1. Следовательно, это прямая C_1D_1, а две вершины параллелограмма, лежащие на этих прямых, — это вершины C_1 и D_1 куба. Тогда противоположная сторона параллелограмма — это ребро AB. Таким образом, параллелограмм, указанный в условии, — это прямоугольник ABC_1D_1, площадь которого очевидно равна $a^2\sqrt{2}$.

10. *Ученик нашёл в книге задачу и её решение.*

Задача. Имеются 13 гирек, на которых указаны массы 1 г, 2 г, ..., 13 г. Масса одной из них отличается от того, что на ней написано, но неизвестно, в какую сторону. На остальных гирьках массы указаны верно. Как за три взвешивания на чашечных весах найти неправильную гирьку?

Решение. Можно сделать такие взвешивания:

1) $1+2+3+4+5+8$ сравнить с $6+7+10$.

2) $1+2+3+6+9+10$ сравнить с $8+11+12$.

3) $1+5+7+9+12$ сравнить с $3+8+10+13$.

Чтобы проверить правильность алгоритма, достаточно убедиться, что:
никакие две гирьки не оказываются каждый раз либо на одной чаше, либо на противоположных чашах, либо одновременно отложенными.

Ученик пришёл к учителю и спросил: "*Что за ерунда здесь написана? Гирьки* 1 *г и* 3 *г каждый раз либо на одной чаше, либо на противоположных. Значит, алгоритм неверен, зачем тогда автор его приводит?*".

1) Посоветуйте учителю, как уточнить подчёркнутые слова, чтобы получился правильный способ проверки алгоритма.

2) Как ещё можно проверить приведённый алгоритм?