

XXII Творческий конкурс учителей по математике

Уважаемые коллеги!

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.)

Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы (www.mcsme.ru/oluch/).

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).

№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

Продолжительность конкурса — 4,5 часа (с 10.00 до 14.30).

I. Решите задачи.

1. Решите уравнение: $|x - 2025| + |x + 2025| = 2|x|$.

2. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два корня, расстояние между которыми больше, чем 2025. Докажите, что уравнение $f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+2024) + f(x+2025) = 0$ имеет два различных корня.

3. Дан правильный 2025-угольник с центром O . Можно ли отметить 44 его вершины так, чтобы сумма векторов с началом в O и концами в этих вершинах была равна нулевому вектору?

4. Трём девочкам-математикам надели шляпки, на каждой — по натуральному числу не больше 25. Им это сообщили, добавив, что числа различные, и наибольшее равно *произведению* двух меньших. Видя числа других, на вопрос: «Верно ли, что у вас на шляпке *наименьшее* из чисел?» девочки одновременно ответили: Даша «Да», Нелли «Нет», Зоя «Не знаю». Найдите все варианты чисел на их шляпках.

5. Ортогональными проекциями треугольника на каждую из двух перпендикулярных плоскостей являются прямоугольные равнобедренные треугольники. Могут ли они быть неравными?

II. Методический блок.

В заданиях NN6–8 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

6. «Задача». Существуют ли два натуральных числа, для которых выполняются два условия:

1) Их сумма равна 2025;

2) Если у большего числа зачеркнуть две последние цифры, то получится меньшее число.

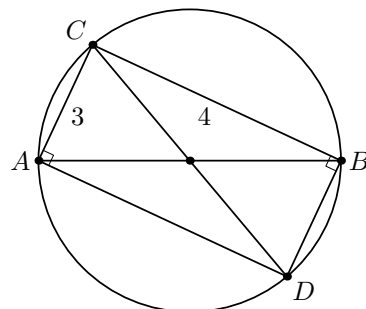
«Ответ»: нет.

«Решение». Введя соответствующие обозначения, условие можно записать так: $\overline{abcd} + \overline{ab} = 2025$. Так как $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$, то это равенство можно привести к виду: $101\overline{ab} = 2025 - \overline{cd}$. Значит, число $2025 - \overline{cd}$ делится нацело на 101. Но такого двузначного числа $\overline{cd}$ не существует.

7. «Задача». В треугольнике ABC : $AC = 3$, $BC = 4$, радиус описанной окружности равен 2,5. Найдите AB .

«Ответ»: 5.

«Решение». *Первый способ.* Проведем диаметр CD описанной окружности (см. рис.). Тогда $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$. Так как $CD = 2R = 5$, то $AD = 4$, $BD = 3$. Следовательно, четырехугольник $ACBD$ — параллелограмм с прямым углом, то есть $ACBD$ — прямоугольник. Тогда $\angle ACB = 90^\circ$, поэтому $AB = 5$.



Второй способ. Из треугольника ABC : так как $\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B} = 2R = 5$, то $\sin \angle A = \frac{4}{5}$, $\sin \angle B = \frac{3}{5}$. Из того, что $\sin^2 \angle A + \sin^2 \angle B = 1$, следует, что $\cos \angle B = \sin \angle A$, то есть $\angle A + \angle B = 90^\circ$. Следовательно, $\angle C = 90^\circ$, значит, $AB = 5$.

8. «Задача». Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге в одном направлении (против часовой стрелки). Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой они могут обгонять друг друга?

«Ответ»: могут.

«Решение». Если скорости богатырей равны $\frac{1}{37}, \dots, \frac{33}{37}$ круга в минуту, то условие задачи выполняется. Пусть два богатыря едут со скоростями $\frac{i}{37}$ и $\frac{j}{37}$ круга в минуту. Они встретились, когда один обогнал другого на k кругов через время t после начала движения из одной точки. Тогда $\frac{t \cdot i}{37} - \frac{t \cdot j}{37} = k$, откуда $t(i - j) = 37k$, то есть t делится на 37 (так как 37 — простое число, а $i - j < 37$). Значит, они встретятся только через время, кратное 37 минутам, но за такое время они оба проедут полное число кругов и окажутся в одной точке.

9. Вениа и Сениа находили первообразную функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x - 4x^2}}$.

«Решение Вениа».

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{6x - 4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{6 - 4x}} = \int \frac{d(2\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{x})^2}} = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{6}}.$$

«Решение Сениа».

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{6x - 4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(2x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{4x - 3}{3}.$$

Бениа, наблюдавший за процессом, заметил, что результаты явно разные. **Кто из мальчиков ошибся и в чём?**

10. Петя придумал новое тождество $C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n-1}$ и предложил его доказательство.

Рассмотрим таблицу $2 \times n$, в которой две строки и n столбцов. Расставим звёздочки в $n + 1$ клетке. Это можно сделать C_{2n}^{n+1} способами. По принципу Дирихле для каждой конкретной расстановки найдётся столбец, в обеих клетках которого находятся звёздочки. Сотрём его. В таблице останется $n - 1$ звёздочка. Но столбцов с двумя звёздочками может оказаться несколько, поэтому соответствие между расстановками $n + 1$ и $n - 1$ звёздочек в таблице получается не однозначным. Договоримся всегда стирать самый левый столбец с двумя звёздочками. Тогда каждой таблице с $n + 1$ звёздочкой соответствует ровно одна таблица с $n - 1$ звёздочкой. Теперь мы построили взаимно однозначное соответствие между способами расставить $n + 1$ и $n - 1$ звёздочку. Значит, $C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n-1}$.

Вася возразил: после вычёркивания столбца в таблице остаётся $2n - 2$ клетки, поэтому верное равенство такое: $C_{2n}^{n+1} = C_{2n-2}^{n-1}$. Мальчики заспорили и пошли к учителю выяснять, кто прав. Учитель при объяснении смог обойтись без формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. И построил объяснение на выбранном мальчиками языке клеток и звёздочек.

Ответьте на следующие вопросы, также не используя формулу для вычисления числа сочетаний, а пользуясь только их комбинаторным смыслом:

- 1) Какое из равенств верное?
- 2) Как его доказать?
- 3) Укажите все ошибки в приведённых мальчиками рассуждениях.