

XVI Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. В киноконцертном зале – 374 кресла, расположенные в виде прямоугольника. В жёстких условиях социальной дистанции запрещено заполнять ряды с чётными номерами, а на остальных рядах между любыми двумя зрителями должно оставаться не менее двух свободных кресел. Какое наибольшее количество билетов могут быть продано с соблюдением этих условий? (*Будем считать, что и количество рядов, и количество мест в ряду больше двух.*)

№2. Решите уравнение: $\frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\cos^2 x}} = \sin x + \cos x$

№3. В окружности проведена хорда AB , на которой отмечена точка X . В каждый из двух образовавшихся сегментов вписана окружность, содержащая точку X . Докажите, что отношение радиусов вписанных окружностей не зависит от выбора точки X .

№4. Найдите наибольшее значение отношения площади поверхности тетраэдра к сумме квадратов его ребер.

№5. В футбольном турнире участвовало n команд. Каждая из них сыграла с каждой один раз. Все матчи проходили на одном поле. Оказалось, что каждая команда в своём k -том матче забила k мячей. Какое наименьшее количество матчей могло закончиться вничью?

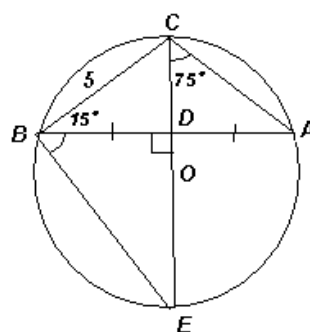
II. Методический блок.

№6. В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

«Задача». Найдите площадь треугольника ABC , в котором $BC=5$, $\angle B = 15^\circ$, а медиана CD образует со стороной AC угол 75° .

«Ответ»: 6,25.

«Решение». Рассмотрим окружность с центром O , описанную около данного треугольника, и продлим CD до пересечения с окружностью в точке E . Тогда $\angle ABE = \angle ACE = 75^\circ$, поэтому $\angle CBE = 90^\circ$, то есть CE – диаметр окружности (см. рис.). Следовательно, её центр O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB , то есть $OD \perp AB$. Значит, медиана CD данного треугольника совпадает с его высотой, поэтому $AC=BC=5$, $\angle ACB = 150^\circ$. Тогда $S_{ABC} = 0,5AC \cdot BC \cdot \sin 150^\circ = 6,25$.



№7. Витя ищет значения двух сумм:

$$1) C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0, p + q = 1$$

$$2) 0C_n^0 p^0 q^n + 1C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + nC_n^n p^n q^0, p + q = 1$$

Он нашёл, что первая сумма равна 1, и перешел ко второму пункту. Его решение:

$$0C_n^0 p^0 q^n + 1C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + nC_n^n p^n q^0 \\ = p \cdot (1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \dots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0)$$

Выражение в скобках похоже на производную некоторого многочлена по переменной p :

$$(C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0)' \\ = 1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \dots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0$$

Но выражение в скобках – это выражение из пункта 1). Тогда

$$p \cdot (1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \dots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0) \\ = p(C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 \\ + C_n^n p^n q^0)' = p(1)' = p \cdot 0 = 0$$

1) Предложите способ вычисления первой суммы.

2) Найдите ошибки при вычислении второй суммы и исправьте их, если это возможно.

3) Как можно интерпретировать заданные суммы с точки зрения теории вероятностей?

№8. Учитель подбирает параметры a , b и c для условия следующей задачи так, чтобы она имела два различных решения.

Задача. Лодка прошла a км по течению реки и b км против течения, затратив на это столько же времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде c км. Каково отношение собственной скорости лодки к скорости течения?

Подскажите учителю какой-либо подходящий набор целых значений указанных параметров так, чтобы оба решения задачи также были целыми. Подтвердите свой ответ выкладками.

III. Аналитический блок.

№9. В последние годы в образовательном процессе нашли широкое применение «Живая геометрия», Geogebra и другие подобные компьютерные программы. В каких видах учебной деятельности их использование уместно, а в каких – не очень полезно, а, возможно, и вредно? Обоснуйте свою точку зрения.