XIX Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Имеются девять карточек, на которых записаны цифры от 1 до 9. Какое наибольшее количество карточек можно выложить в ряд слева направо так, чтобы числа на любых двух соседних карточках образовали двузначное число, являющееся квадратом целого числа?

№2. Существует ли тетраэдр, в котором основания ровно двух высот лежат вне граней тетраэдра?

№3. На уменьшенной шахматной доске размером 6×6 расставлены короли и слоны так, что короли не бьют друг друга и слоны не бьют друг друга. Какое наибольшее количество этих фигур может стоять на такой доске?

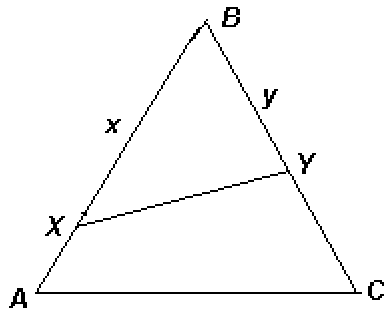
№4. Сколько решений имеет система уравнений: $\begin{cases}(2x+y+1)^2=5z,\\ (-x+y+1)^2=2z,\\ (x+2y-2)^2=5z\end{cases}$?

№5. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Также на сторонах треугольника ABC, но во внутреннюю часть построены правильные треугольники с центрами O_1, O_2, O_3. Пусть L, N и K – точки, делящие отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно в отношениях 1 : 2, считая от вершин треугольника ABC, а T – точка Торричелли треугольника ABC. Докажите, что 7 точек: O_1, O_2, O_3, L, N, K и T лежат на одной окружности.

II. Методический блок.

В заданиях №6 – №8 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№6. «Задача». Дан правильный треугольник со стороной 1. Докажите, что наименьшая длина линии, соединяющей точки на двух его сторонах и делящей площадь треугольника пополам, равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



«Решение». Пусть точки X и Y лежат на сторонах AB и BC правильного треугольника ABC со стороной 1 (см. рисунок). Проведём отрезок XY и оценим его длину. Введём обозначения: $BX = x$, $BY = y$. По условию $\frac{S_{XBY}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$. Значит, $\frac{0{,}5xy\sin\angle ABC}{0{,}5AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}$ = xy = $\frac{1}{2}$. По теореме косинусов из треугольника BXY: $XY^2 = x^2 + y^2 - xy \ge xy = \frac{1}{2}$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y$, то есть когда $XY \parallel AC$. Следовательно, наименьшее значение длины XY равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

№7. «Задача». Какие значения может принимать $f(0)$, если $f(f(\mathbf{x})) = x^2 - x + 1$?

«Ответ»: $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$.

«Решение». Заметим, что если $f(0) = 0$, то $f(f(0)) = f(0) = 1$. Аналогично, если $f(0) = 1$, то $f(f(0)) = f(1) = 1$. Значит, $f(0) = 0$ и $f(0) = 1$ являются решениями задачи.

Докажем, что других решений нет. Пусть $f(0) = t$, тогда $f(t) = (t - 0{,}5)^2 + 0{,}75$. Если $t < 0$ или $\mathbf{t} > 1$, то $(t - 0{,}5)^2 > 0{,}25$, поэтому $f(t) > 1$. Если $0 < t < 1$, то $(t - 0{,}5)^2 < 0{,}25$, поэтому $f(t) < 1$.

№8. «Задача». На клетчатой бумаге отмечено 49 узлов сетки, являющихся вершинами клеток квадрата 6×6. Требуется провести несколько единичных отрезков с концами в отмеченных узлах так, чтобы между каждой парой соседних узлов был путь длины не больше, чем 3. Докажите, что потребуется провести не меньше, чем 52 отрезка.
«Решение». Решим сначала аналогичную задачу для 16 узлов, являющихся вершинами клеток квадрата 3×3. Пусть некоторые из них соединены единичными отрезками так, чтобы выполнялось условие задачи. Будем рассматривать полученную картинку как граф. В нём каждые две вершины, находящиеся на расстоянии 1, соединены либо ребром, либо путём длины 3, значит, этот граф связный.

Докажем, что в графе есть цикл, то есть он не может быть деревом. Из этого будет следовать, что в нём не меньше 16 рёбер. Рассмотрим четыре вершины, расположенные внутри квадрата. Если каждая пара соседних из них соединена ребром, то эти рёбра образуют цикл. Если же какие-то две соседние вершины A и B не соединены ребром, то между ними есть путь, проходящий по трём сторонам одной из примыкающих к ним клеток. Возьмём вторую примыкающую к ним клетку и посмотрим на три пары её соседних вершин, кроме A и B. Каждая пара соединена либо ребром, либо путём длины 3, который при этом не содержит ребро AB. Вместе с путём между A и B все они образуют цикл.

Таким образом, в квадрате 3×3 необходимо провести не меньше, чем 16 отрезков. Перейдём к оценке количества отрезков для квадрата 6×6. Если разбить его на четыре квадрата 3×3, то в них суммарно должно быть проведено хотя бы $16\cdot4 = 64$ отрезка. При этом дважды мы могли учесть максимум 12 отрезков, находящихся на общих сторонах квадратов 3×3. Следовательно, всего отрезков не меньше, чем $64 - 12 = 52$.

III. Аналитический блок.

№9. В Федеральную рабочую программу для углублённого изучения математики в 10-11 классах включены элементы линейной алгебры. Далее цитата из ФРП.

«Матрица системы линейных уравнений. Определитель матрицы 2×2, его геометрический смысл и свойства, вычисление его значения, применение определителя для решения системы линейных уравнений. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений. Исследование построенной модели с помощью матриц и определителей».

Проанализируйте целесообразность, плюсы и минусы такого изменения школьного курса.