

XXI Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Найдите x , если известно, что числа $\lg 3$, $\lg(3^x - 2)$ и $\lg(3^x + 1)$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

№2. В пространстве расположены 6 различных точек, не все из которых лежат в одной плоскости. Каждую пару точек соединили отрезком. Могла ли получиться конструкция, в которой есть ровно 30 равнобедренных треугольников, вершинами которых являются общие точки каких-либо отрезков?

№3. Существуют ли такие натуральные числа a , b и c , что сумма $\text{НОД}(a^2; b^2) + \text{НОД}(a; bc) + \text{НОД}(b; ac) + \text{НОД}(c; ab)$ равна простому числу?

№4. Квадрат и треугольник описаны около некоторой окружности. Докажите, что внутри треугольника лежит больше половины границы квадрата.

№5. Вычислите, не используя калькулятор: $\tg \frac{\pi}{7} \cdot \tg \frac{2\pi}{7} \cdot \tg \frac{3\pi}{7}$.

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№6. «Задача». Петя, Дима, Миша, Саша и Илья играют в мафию. Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают только друг друга, комиссар знает роль каждого, мирные жители не знают роли других игроков. Мафиози всегда лгут. Комиссар и мирные жители говорят правду. Мальчики сделали следующие заявления (в указанном порядке):

Петя: «Я не знаю, кто Дима»;

Дима: «Я знаю, кто комиссар»;

Миша: «Я знаю, кто Петя»;

Саша: «Я знаю, что Миша – комиссар».

Кто Илья?

«Ответ»: мирный житель.

«Решение». Из Петиных слов следует, что он не комиссар. Возможны два случая:

1) Петя – мафиози. Тогда он лжет и на самом деле знает, кто Дима, поэтому Дима – второй мафиози.

2) Петя – мирный житель.

Информации, которую Дима мог бы извлечь из Петиного высказывания, недостаточно, чтобы догадаться, кто комиссар. Поэтому если Дима говорит правду, то он сам и есть комиссар. А если лжет, то он – мафиози.

Если бы Миша был мирным жителем, он к этому моменту еще не мог понять, кто Петя: мирный житель или мафиози. Если Петя и Дима – два мафиози, то Миша комиссар, если Петя – мирный житель, а Дима – комиссар, то Миша – мафиози, если Петя – мирный житель, а Дима – мафиози, то Миша – комиссар или мафиози.

Теперь видно, что Саша, будучи мирным жителем, не может быть уверен, что Миша – комиссар. А комиссар никого другого назвать комиссаром не может. Значит, Саша – мафиози.

Теперь ясно почти все: Петя – мирный житель, Саша – первый мафиози, Дима и Миша – комиссар и второй мафиози (в произвольном порядке), а Илья – мирный житель.

№7. «Задача». В графе 2026 вершин, причём степень каждой не менее трёх. Докажите, что в графе есть цикл длины не более 19.

«Решение». Подвесим граф за какую-нибудь вершину. Тогда на первом этаже не менее трёх вершин, на втором – не менее, чем 3·2, и так далее, на десятом этаже – не менее,

чем $3 \cdot 2^9$ вершин. Если на этаже с номером n , где $n \leq 9$, есть ребро между вершинами данного этажа, то появился цикл длиной ровно $2n+1 \leq 19$, поэтому на первых девяти этажах из каждой вершины ведут на нижний этаж не менее двух рёбер, следовательно, в данном графе будет не менее десяти этажей. Тогда общая сумма вершин не менее $1 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 2^9 = 1 + 3(2^{10} - 1) = 3070$. Противоречие.

№8. Задача. Биссектриса BE и медиана AD треугольника ABC перпендикулярны и имеют одинаковые длины, равные 4. Найдите длины сторон треугольника ABC .

Воспроизведите как можно больше различных «школьных» способов её решения.

III. Педагогический блок.

№9. В последние годы обострилась проблема подбора заданий для школьников, особенно в связи с развитием искусственного интеллекта. Можно ли (в частности, за счёт подбора задач) обеспечить самостоятельное выполнение домашних заданий? Если Вы сталкивались с этой проблемой, то поделитесь своим опытом её решения.