Творческий конкурс учителей математики

В Москве уже второй год проводится творческий конкурс учителей математики. Задания прошедшего конкурса мы разобрали в первом номере газеты.

В этому году наша газета и Московский центр непрерывного математического образования впервые проводят аналогичный **заочный конкурс**.

Вам предлагается 8 заданий, разбитых на три блока.

Работы с пометкой «На конкурс» следует высылать в редакцию газеты по адресу: «Математика», Издательский дом «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165, **до 15 апреля 2006 года** (по почтовому штемпелю).

В работе необходимо указать: фамилию, имя, отчество; домашний адрес, адрес электронной почты (если есть); название учебного заведения, в котором вы работаете, а также среднюю недельную нагрузку в этом учебном году. Допускаются к участию в конкурсе и коллективные работы.

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Победители конкурса будут награждены дипломами и учебно-методической литературой по математике. Кроме того, победители будут приглашены к участию в очном или Интернет-туре конкурса.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успехов!

I. Решите задачи

1. Книга состоит из 30 рассказов объемом 1, 2, 3,..., 30 страниц. Рассказы печатаются с первой страницы, каждый рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечетной страницы?

2. Найдите все тройки $(x; y; z)$ целых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) + \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

3. Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?

4. В квадрате 100×100 клеток некоторые клетки закрашены. Известно, что каждая клетка (в том числе и закрашенная) граничит по стороне ровно с одной закрашенной клеткой. Сколько клеток закрашено?

II. Найдите ошибки

5. Лежандр (1752—1833) — автор многочисленных исследований по геометрии, в том числе учебников. Учебники его многократно исправлялись, в частности, по причине содержащихся в них ошибочных «доказательств» V постулата Евклида. Вот одно из них.

В этом доказательстве Лежандр опирается на две ранее доказанные теоремы. Одна из них состоит в том, что V постулат вытекает из того факта, что сумма углов любого треугольника равна 180°. Эта теорема была ранее безупречно доказана самим Лежандром. Вторая теорема (доказанная ранее Саккери, Ламбертом и другими) гласит, что сумма углов любого треугольника не превосходит 180°. Исходя из первой теоремы, мы видим, что для доказательства V постулата достаточно без опоры на него же доказать, что сумма углов любого треугольника равна 180°.

Лежандр приводит такое рассуждение «от противного». Пусть существует треугольник ABC такой, что сумма его углов равна $S(ABC) = 180° - \delta$, где $\delta > 0$. Пусть A — наименьший (а значит, острый) угол этого треугольника. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Проведем через точку D прямую, пересекающую лучи AB и AC в точках K и L соответственно. Подсчитаем сумму углов в треугольнике AKL так: просуммируем углы в треугольниках ABC, BCD, BDK и CDL, а затем вычтем три раза по 180°, ибо углы при вершинах B, D и C в сумме составляют развернутые.

Получим:

$$S(AKL) = 2S(ABC) + S(BDK) + S(CDL) - 540° = S(BDK) + S(CDL) - 180° - 2\delta.$$

Далее, в силу второй указанной теоремы, заменим $S(BDK) + S(CDL)$ на выражение $2 \cdot 180°$, которое не меньше этой суммы. Получим, что $S(AKL) \le 180° - 2\delta$.

Поступая так несколько раз, можно построить треугольники со сколь угодно малой (и даже отрицательной!) суммой углов, что, несомненно, есть противоречие. Утверждение доказано.

Найдите ошибку в приведенном доказательстве.

6. Известно, что числа p и q являются корнями квадратного уравнения $5x^2 + bx + 10 = 0$. Найдите корни уравнения $10x^2 + bx + 5 = 0$.

Приведем два способа решения этой задачи.

Первый способ. Заметим, что дискриминанты указанных уравнений одинаковы: $D = b^2 - 200$, поэтому, независимо от значения b, если первое уравнение имеет корни, то и второе также имеет корни.

Пусть, для определенности, $p \ge q$, тогда

$$p = \frac{-b+\sqrt{D}}{10};\ q = \frac{-b-\sqrt{D}}{10}.$$

Пусть m и n – корни второго уравнения, причем $m \ge n$, тогда

$$m = \frac{-b+\sqrt{D}}{20} \text{ и } n = \frac{-b-\sqrt{D}}{20}.$$

Следовательно, $m = 0{,}5p$; $n = 0{,}5q$.

Второй способ. Из условия следует, что выполняется числовое равенство $5p^2 + bp + 10 = 0$, где $p \ne 0$. Разделив его почленно на p^2, получим:

$$5 + \frac{b}{p} + \frac{10}{p^2} = 0 \Leftrightarrow 10\left(\frac{1}{p}\right)^2 + b\cdot\frac{1}{p} + 5 = 0,$$

то есть число $\frac{1}{p}$ является корнем второго уравнения. Другой корень второго уравнения находим по теореме Виета: $\frac{1}{2} : \frac{1}{p} = \frac{p}{2}$. Таким образом, корнями второго уравнения являются числа $\frac{1}{p}$ и $\frac{p}{2}$.

Почему при решении различными способами получились разные ответы?

III. Найдите как можно больше способов решения каждой задачи и запишите эти решения так, как вы бы хотели видеть в работе вашего ученика.

7. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 на сторонах AB, BC, CD и DA отмечены точки M, N, K и L соответственно так, что $AM + AL + CN + CK = 2$. Докажите, что прямые MK и NL перпендикулярны.

8. Докажите, что если $a + b + c = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$.