ОТЧЕТ

по гранту Пьера Делиня

П.С. Колесников
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

8 декабря 2006 г.

1. Публикации по проекту

1. Identities of conformal algebras and pseudoalgebras, *Comm. Algebra* 34 (2006), no. 6, 1965–1979.
2. On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras, *J. Algebra and Its Appl.*, to appear, ArXive math.RA/0508105.
3. An embedding of a dialgebra into an associative conformal algebra, ArXive math.QA/ 0611501.

2. Краткое описание новых результатов, полученных в рамках проекта

В работе [1] установлена в явном виде связь между тождествами алгебры коэффициентов конформной алгебры и тождествами самой этой конформной алгебры.

Любая конформная алгебра может рассматриваться как псевдоалгебра (в смысле [BD]) над алгеброй многочленов $H = \Bbbk[T]$ от одной переменной ($\Bbbk$ — поле характеристики нуль). Псевдоалгебра P представляет собой объект псевдотензорной категории левых H-модулей $\mathcal{M}^*(H)$, снабженный $(H\otimes H)$-линейной операцией $* : P \otimes P \to (H \otimes H) \otimes_H P$ (см. [BDK]).

Любому многообразию V алгебр над $\Bbbk$ можно поставить в соответствие семейство однородных полилинейных тождеств I и бинарную операду $\mathcal{C}_I$ такую, что V совпадает с классом $\mathcal{C}_I$-алгебр в псевдотензорной категории $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над $\Bbbk$. (Напомним, что если $\mathcal{C}$ — некоторая операда, $\mathcal{A}$ — некоторая псевдотензорная категория, то $\mathcal{C}$-алгебра в $\mathcal{A}$ — это функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}$ [B, Le].)

Естественно определить многообразие V конформных алгебр как класс $\mathcal{C}_I$-алгебр в категории $\mathcal{M}^*(H)$. Этот класс образует (обычную) категорию относительно гомоморфизмов конформных алгебр, обозначим ее V^{conf}.

Основной результат [1] можно изложить в следующей компактной форме.

Теорема 1. *Пусть V — многообразие алгебр. Правило $P \mapsto \operatorname{Coeff} P$ является функтором из категории V^{conf} в категорию V^{alg} обычных алгебр многообразия V. Наоборот, если $\operatorname{Coeff} P \in V^{\mathrm{alg}}$, то $P \in V^{\mathrm{conf}}$.*

Это доказывает, что предложенный подход к определению многообразий конформных алгебр эквивалентен предложенному ранее в [Ro].

* * *

Работа [2] продолжает серию статей [Ko1, Ko2], в которых строится теория ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа. Ранее было описано строение простых и полупростых таких алгебр: простая изоморфна либо алгебре петель $\operatorname{Cur} M_n(\Bbbk)$, либо алгебре вида $\operatorname{Cend}_{n,Q}$, $\det Q \neq 0$, полупростая представляется в виде прямой суммы простых. Кроме того, любая ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа содержит наибольший нильпотентный идеал (радикал), фактор по которому полупрост и также имеет точное представление конечного типа. Естественно возникает вопрос: верен ли аналог основной теоремы Веддерберна для этого класса конформных алгебр? Оказывается, что в общем случае ответ отрицательный, но при некотором дополнительном условии на полупростой фактор — положительный.

Теорема 2. *Пусть C — ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа, R — радикал C. Если конформная алгебра C/R унитальна (т. е. содержит элемент e такой, что $e \,(0)\, x = x$ для любого $x \in C/R$ и $e \,(n)\, e = 0$ при $n > 0$), то C представима в виде прямой суммы R и полупростой подалгебры C_1, изоморфной C/R.*

Показано, что без условия унитальности теорема неверна (приведен соответствующий пример). Работа показывает необходимость развития теории когомологий Хокшильда для ассоциативных конформных алгебр.

* * *

В работе [3] показана связь между двумя алгебраическими структурами, возникшими независимо друг от друга в различных областях: диалгебрами и ассоциативными конформными алгебрами.

Понятие диалгебры было введено в [L1], это аналог ассоциативной обертывающей алгебры для алгебры Лейбница (некоммутативной алгебры Ли). Согласно определению, диалгебра представляет собой векторное пространство с двумя ассоциативными билинейными операциями $\dashv$, $\vdash$, которые удовлетворяют следующим свойствам:

$$(a \dashv b) \dashv c = a \dashv (b \vdash c), \quad (a \vdash b) \dashv c = a \vdash (b \dashv c), \quad (a \dashv b) \vdash c = a \vdash (b \vdash c).$$

Оказывается, что любая ассоциативная конформная алгебра C относительно операций

$$a \vdash b = a \,(0)\, b, \quad a \dashv b = \sum_{s \geq 0} \frac{(-D)^s}{s!} (a \,(s)\, b)$$

является диалгеброй, которую мы обозначим через C^0. Возникает естественный вопрос: любую ли диалгебру можно получить таким образом? Ответ дает следующая

Теорема 3. *Пусть A — диалгебра над полем $\Bbbk$ характеристики нуль. Тогда существует ассоциативная конформная алгебра C такая, что A изоморфна поддиалгебре в C^0.*

Более того, для любого числа $n \geq 2$ можно построить ассоциативную конформную алгебру $C(A, n)$ для диалгебры A, являющуюся универсальной обертывающей в классе всех конформных алгебр C таких, что $A \subset C^0$ и функция локальности в C на $A \times A$ не превосходит n.

Как следствие результатов [L2], получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Любая алгебра Лейбница над полем характеристики нуль вложима в ассоциативную конформную алгебру.*

3. Педагогическая деятельность

На каферде Алгебры и математической логики Механико-математического факультета НГУ мною читаются следующие специальные курсы:

— *Теория колец.* Курс содержит основы структурной теории некоммутативных ассоциативных колец, колец с полиномиальными тождествами. Также рассматривается применение комбинаторных методов теории колец для решения алгоритмических проблем для групп и полугрупп.

— *Алгебра-3.* В этом курсе излагаются основы универсальной алгебры и рассматриваются дополнительные главы алгебры, не входящие в стандартный курс алгебры на ММФ НГУ: теория решеток, булевых алгебр, алгебр Ли, представления конечных групп.

Литература

[B] Bakalov B., Beilinson-Drinfeld's definition of a chiral algebra, 2002, preprint.

[BDK] Bakalov B., D'Andrea A., Kac V.G., Theory of finite pseudoalgebras, Adv. Math. 162 (1) (2001).

[BD] Beilinson A.A., Drinfeld V.G., Chiral algebras, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 51, AMS, Providence, RI, 2004.

[Ko1] Kolesnikov P.S., Simple associative conformal algebras of linear growth, J. Algebra 295 (2006), no. 1, 247–268.

[Ko2] Kolesnikov P.S., Associative conformal algebras with finite faithful representation, Adv. Math. 202 (2006), no. 2, 602–637.

[Le] Leinster T., Higher operads, higher categories, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 298, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[L1] Loday J.-L., Algebrès ayant deux operations associatives (digèbres), C. R. Acad. Sci. Paris 321 (1995), 141–146.

[L2] Loday J.-L., Dialgebras, in: Dialgebras and Related Operads, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1763, pp. 7-66. Springer Verl., Berlin, 2001.

[Ro] Roitman M., On free conformal and vertex algebras, J. Algebra 217 (1999) no. 2, 496–527.