ОТЧЕТ

по гранту Пьера Делиня

П.С. Колесников

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

1. Результаты, полученные в 2008 году

Нами получено необходимое условие неприводимости алгебры конформных эндоморфизмов свободного конечно-порожденного модуля над линейной алгебраической группой.

Построение структурной теории ассоциативных конформных алгебр стало возможным после решения проблемы, поставленной в работе *C. Boyallian, V.G. Kac, J. I. Liberati, J. Algebra, 2003*, состоявшей в доказательстве аналога теоремы Бернсайда о неприводимых алгебрах линейных преобразований для случая конформных алгебр. Эта проблема была окончательно решена в работе *P. S. Kolesnikov, Adv. Math., 2006*, в связи с чем возник естественный вопрос: нельзя ли обобщить соответствующие результаты на случай *псевдоалгебр* над данной алгеброй Хопфа H (например, обычные алгебры — это псевдоалгебры над одномерной алгеброй $H = \Bbbk$, конформные — над $H = \Bbbk[x]$).

Это оказалось возможным сделать для класса алгебр Хопфа, являющихся координатными алгебрами линейных алгебраических групп. При этом центральное понятие *алгебры конформных эндоморфизмов* обретает весьма прозрачный смысл.

Пусть G — линейная алгебраическая группа, $H = \Bbbk[G]$ — ее координатная алгебра Хопфа. Назовем G-конформной алгеброй ассоциативную псевдоалгебру над H. Структура G-конформной алгебры на левом H-модуле C полностью описывается набором операций $(\cdot_\gamma\cdot)$, $\gamma \in G$, таких, что

(1) для любых $a, b \in C$ существует $\sum_i f_i \otimes c_i \in H \otimes C$ такое, что $(a_\gamma b) = \sum_i f_i(\gamma) c_i$;

(2) $f a_\gamma b = f(\gamma^{-1})(a_\gamma b)$, $f \in H$;

(3) $a_\gamma h b = L_\gamma h(a_\gamma b)$, $h \in H$.

Свойство (1) является естественным обобщением аксиомы локальности для конформных алгебр. Свойства (2) и (3) связывают операции γ-умножения с действием H.

Пусть V — аффинное алгебраическое множество, для которого задано непрерывное действие группы $G \times V \to V$. Рассмотрим множество $\mathrm{Cend}_n^{G,V}$, $n \geq 1$, состоящее из всех таких отображений

$$a : G \to \mathrm{End}_\Bbbk(M_n), \quad M_n = H \otimes \Bbbk^n,$$

что для любого $u \in M_n$ операция $(a_\gamma u) = a(\gamma)u$, $\gamma \in G$, локальна в смысле (1) и $a_\gamma h u = L_\gamma h(a_\gamma u)$, $h \in H$.

На множестве $\mathrm{Cend}_n^{G,V}$ можно определить структуру G-конформной алгебры следующим образом:

$$(ha)(\gamma) = h(\gamma^{-1})a(\gamma), \quad (a_\gamma b)(g) = a(\gamma)b(g\gamma^{-1}),$$

$a, b \in \mathrm{Cend}_n^{G,V}$, $h \in H$, $g, \gamma \in G$.

Таким образом, G-конформную алгебру $\mathrm{Cend}_n^{G,V}$ можно рассматривать как совокупность «алгебраических» правил преобразования пространства M_n вектор-значных регулярных функций на V при помощи группы G. Например, левый сдвиг L является таким правилом (он играет роль единицы в G-конформной алгебре $\mathrm{Cend}_n^{G,V}$).

Нетрудно заметить, что $\mathrm{Cend}_n^{G,V} \simeq H \otimes A \otimes \mathbb{M}_n(\Bbbk)$, где $A = \Bbbk[V]$. Для регулярного случая $V = G$ оказана следующая

Теорема. *Пусть $C \subseteq \mathrm{Cend}_n^{G,G}$ — конформная подалгебра, действующая неприводимо на M_n, т.е. такая, что в M_n нет нетривиальных H-подмодулей, инвариантных* *относительно операторов $a(\gamma)$, $a \in C$, $\gamma \in G$. Тогда $(1 \otimes H \otimes 1)C$ является существенным левым идеалом в* $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$.

Также показано, что любой (существенный) левый идеал в $\mathrm{Cend}_n^{G,V}$ получается из (существенного) левого идеала в $\mathbb{M}_n(A)$ при помощи формального преобразования Фурье. Таким образом, получено необходимое условие неприводимости алгебры конформных эндоморфизмов конечно-порожденного модуля над любой линейной алгебраической группой.

Анализ этого условия с целью получения полного описания неприводимых конформных подалгебр в $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$ в общем случае представляет собой, по-видимому, сложную задачу. При $G = \{e\}$ необходимое условие, приведенное в теореме, является достаточным (теорема Бернсайда). При $|G| < \infty$ категория G-конформных алгебр эквивалентна категории G-градуированных обычных алгебр. В этом случае анализ неприводимых подалгебр в $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$ позволяет получить классификацию простых градуированных ассоциативных алгебр (F. van Oystaeyen, 1968) в случае алгебраически замкнутого поля (см. также Yu. Bakhturin, M. Zaicev, S. Sehgal, 2008). Для случая аффинной прямой соответствующий анализ приводил к построению структурной теории ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа, которые, в свою очередь, могут быть представлены подалгебрами в обычной алгебре матриц над (первой) алгеброй Вейля.

2. Список публикаций, выполненных при поддержке гранта Пьера Делиня в 2006–2008 гг.

(1) Kolesnikov P., Identities of conformal algebras and pseudoalgebras, Comm. Algebra **34** (2006), no. 6, 1965–1979.
(2) Kolesnikov P., On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras, J. Algebra and Its Appl., **6** (2007), no. 1, 119–134.
(3) Kolesnikov P., Associative algebras related to conformal algebras, Applied Categorical Structures **16** (2008), no. 1-2, 167–181.
(4) Kolesnikov P., Universally defined representations of conformal Lie superalgebras, Journal of Symbolic Computation **43** (2008), no. 6–7, 406–421.
(5) Kolesnikov P., On Irreducible subalgebras of matrix Weyl algebras, Advances in Algebra and Combinatorics (Ed. by K.P. Shum et al.) World Scientific Publishing Co., Hong Kong, 2008. P. 205–217.
(6) Колесников П. С., О неприводимых алгебрах конформных эндоморфизмов над линейной алгебраической группой, Современная математика и ее приложения. Т. 60, Алгебра (2008), 42–56; English translation: On irreducible algebras of conformal endomorphisms over a linear algebraic group,
ArXiv: http://front.math.ucdavis.edu/0712.4127
(7) Kolesnikov P., Varieties of dialgebras and conformal algebras,
ArXiv: http://front.math.ucdavis.edu/0611.5501.
(8) Kolesnikov P., Conformal representations of Leibniz algebras,
ArXiv: http://front.math.ucdavis.edu/0708.2315.
(9) Kolesnikov P., Conformal Algebras in The Context of Linear Algebraic Groups, in: Generalized Lie Theory in Mathematics, Physics and Beyond, S. Silvestrov el al (Eds.), Springer, 2009. P. 241–252.
(10) Колесников П.С., Строение ассоциативных конформных алгебр. Автореф. дисс... д.ф.-м.н., Новосибирск, 2008. 26 стр.

3. Участие в конференциях в 2006–2008 гг.

(1) Cairo Algebra/Coalgebra Conference, March 25–30, 2006, Cairo, Egypt. Пленарный доклад «Associative algebras related to conformal algebras».
(2) Международная конференция «Мальцевские чтения», 14–16 ноября 2006, Новосибирск. Пленарный доклад «Конформные алгебры в теории колец».
(3) International Workshop in Algebra and Applications, 2–4 July, 2007, Guangzhou, China. Доклад «Varieties of dialgebras and conformal algebras».
(4) The 2nd International Congress in Algebras and Combinatorics, July 6–11, 2007, Beijing, China. Пленарный доклад «Conformal algebras and their relations in ring theory».
(5) Международная конференция "Transformation Groups Москва, Московский независимый университет, 17–22 декабря 2007 г. Секционный доклад «Varieties of dialgebras and conformal algebras».
(6) Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, Москва, МГУ, 28 мая – 3 июня 2008 г. Доклад «Строение ассоциативных конформных алгебр и их приложения»
(7) International Conference on Algebra and Related Topics (ICART2008) Bangkok, Chulalongkorn University, 28–30 мая 2008 г. Пленарный доклад «A categorical way to the PBW-theorem for Leibniz algebras».
(8) X Белорусская математическая конференция, Минск, Белоруссия, 2–7 ноября 2008 г. Секционный доклад «Quantum Leibniz algebras and their conformal representations».

4. Педагогическая деятельность

В Новосибирском государственном университете мною читаются:
— основной курс «Теория чисел» для студентов 1 курса механико-математического факультета НГУ;
— специальный курс «Алгебра-3» для студентов 3–5 курса и аспирантов механико-математического факультета НГУ.

Также веду практические занятия по курсам «Высшая алгебра» и «Высшая алгебра и алгебраическая геометрия».

В течение 2005–2008 гг. под совместным руководством Л.А. Бокутя и П.С. Колесникова выполнена кандидатская диссертация И.А. Долгунцевой на тему «Когомологии Хохшильда ассоциативных конформных алгебр», защита которой состоялась 14 ноября 2008 г.

5. Сравнение с заявкой

Проект исследований включал следующие направления.

1. Лиевы конформные подалгебры в $\mathrm{gc}_n := \mathrm{Cend}_n^{(-)}$, действующие неприводимо на M_n.

Эта задача в настоящий момент является основной нерешенной задачей о конформных алгебрах. Нами реализуется подход, который может указать путь решения этой задачи, основанный на параллели между конформными алгебрами (над $G = \mathbb{A}^1$) и $\mathbb{Z}$-конформными алгебрами (над $G = \mathbb{A}_m \simeq (\Bbbk^*, \cdot)$). Второй класс алгебр хоть и менее изучен, но имеет, по-видимому, более прозрачное строение. Первым шагом к решению этой задачи для мультипликативной группы является приведенная выше теорема.

2.2. Отщепление радикала в подалгебрах $C \subseteq \mathrm{Cend}_n$.

Показано, что если C — ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа, то в ней найдется наибольший нильпотентный идеал $R(C)$

(радикал) такой, что $C/R(C)$ полупроста и тоже имеет точное представление конечного типа.

Установлено, что если $C/R(C)$ унитальна (т.е. содержит конформную единицу), то $C = S \oplus R(C)$, где $S \subseteq C$ — конформная подалгебра. Найден пример, показывающий, что без условия унитальности этот результат неверен [2]. (В диссертации И.А. Долгунцевой был построен аппарат когомологий Хокшильда для ассоциативных конформных алгебр, позволяющий доказать возможность отщепления подалгебр вида Cur_n, Cend_n в любом расширении с нильпотентным ядром.)

2.3. Универсальные обертывающие для конформных супералгебр Ли.

В этом направлении получено полное описание универсально определенных представлений конформных супералгебр серии W_n, и найдено единственное такое представление конформной супералгебры Невью — Шварца K_1 (в естественных порождающих) [4].

2.4. Автоморфизмы свободных конформных алгебр.

В этом направлении не удалось получить содержательных результатов. Но при изучении свободных конформных (ассоциативных) алгебр была обнаружена связь между диалгебрами и конформными алгебрами, ее исследованию посвящены работы [7, 8].

2.5. Получить обобщение структурных теорем о конформных алгебрах на случай псевдоалгебр.

Удалось обобщить ключевой результат структурной теории конформных алгебр на случай псевдоалгебр над координатной алгеброй Хопфа линейной алгебраической группы (см. выше, а также [6, 9]). Структура псевдоалгебры этого типа описывается семейством бинарных операций, индексированным элементами группы. В частности, конформные алгебры в смысле В.Г. Каца соответствуют случаю аффинной прямой. Полученный результат может являться основой для дальнейших исследований не только конформных, но и обычных алгебр, например, алгебр дифференциальных операторов [5].