ОТЧЁТ
по стипендии Пьера Делиня
за 2008 г.

Стипендиат: Борисов Денис Иванович, Башкирский государственный педагогический университет, г. Уфа.

Статьи, опубликованные при поддержке стипендии

[1]. Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением // Известия АН. Серия математическая. 2008. Т. 72. № 4. С. 37-66.

[2]. Д.И. Борисов. Асимптотики для решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 2. С. 19-42.

[3]. D. Borisov, D. Krejcirik. $\mathcal{PT}$-symmetric waveguide // Integral Equations and Operator Theory, to appear.

[4]. D. Borisov and P. Freitas. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Annales de l'institut Henri Poincare (C) Analyse non-lineaire. 2008, to appear.

Участие в научных конференциях

1. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и динамические системы", Суздаль, 27 июня – 2 июля, 2008.

Научные результаты, полученные за отчётный период

Содержание работ [1], [2] было описано в отчёте за 2007 г.

В работе [3] рассматривалась задача о $\mathcal{PT}$-симметричном волноводе. Постановка задачи выглядит следующим образом. Пусть $x = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$, $\Omega := \{x : 0 < x_2 < d\}$, $\alpha = \alpha(x_1) \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ – вещественная функция. Рассматривается оператор $H_\alpha := -\Delta$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(H_\alpha) := \{u \in W^2_2(\Omega) : \partial_{x_2} u + \mathrm{i}\alpha u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\}.$$

Такой оператор является $\mathcal{PT}$-симметричным, то есть,

$$(\mathcal{PT})H_\alpha = H_\alpha(\mathcal{PT}),$$

где $(\mathcal{P}u)(x) := u(x_1, d - x_2)$, $\mathcal{T}u := \overline{u}$. Подобные операторы в последнее время достаточно активно изучаются в связи с тем, что они нередко обладают вещественным спектром, что может иметь определённую физическую интерпретацию. В [3] показано, что оператор H_α является m-секториальным и удовлетворяет равенству $H_\alpha^* = H_{-\alpha}$. Основное внимание уделялось случаю $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, где α_0 – некоторая константа, $\alpha_1 \in C_0(\mathbb{R}) \cap W^1_\infty(\mathbb{R})$. Предполагалось, что $\alpha_0 d/\pi \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. При таких предположениях явно найден существенный спектр:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\alpha) = [\mu_0^2, \infty), \tag{0.1}$$

где

$$\mu_0 = \begin{cases} \alpha_0, & \text{если} \quad |\alpha_0| \leqslant \pi/d\,, \\ \pi/d, & \text{если} \quad |\alpha_0| > \pi/d\,. \end{cases} \tag{0.2}$$

В случае $\alpha_1 = \varepsilon\beta$, $\varepsilon \to +0$ исследовался эффект возникновения собственных значений из края существенного спектра. Получены достаточные условия возникновения и отсутствия таких собственных значений. При этом были рассмотрены три случая: $\alpha_0 = 0$, $|\alpha_0| \in (0, \pi/d)$, $|\alpha_0| > \pi/d$. В первом случае было показано, что не существует возникающих собственных значений. Во втором случае основную роль играет знак величины $\alpha_0 \int_{\mathbb{R}} \beta(x)\,\mathrm{d}x$. Если она положительна, то собственное значение возникает, если отрицательна, то не возникает. В случае равенства нулю следует вычислить число τ по некоторой явной формуле, и вновь в зависимости от знака τ собственное значение возникает или не возникает. В случае $|\alpha_0| > \pi/d$ главную роль играет знак числа τ, которое вновь вычисляется по некоторой явной формуле. Как и выше, в зависимости от знака собственное значение возникает или не возникает. Во всех случаях показано, что возникающее собственное значение простое, единственное и вещественное. Кроме того, для него вычислены первые члены асимптотического разложения и описано асимптотическое поведение соответствующей собственной функции.

В статье [4] рассматривался Лапласиан с краевым условием Дирихле в тонкой двумерной области. Область задавалась следующим образом:

$$\Omega_\varepsilon = \{x : x_1 \in (0,1), -\varepsilon h_-(x_1) < x_2 < \varepsilon h_+(x_1)\},$$

где ε – малый положительный параметр, $h_\pm = h_\pm(x_1) \in C[0,1]$ – некоторые функции, $H := h_- + h_+ > 0$ для всех $x \in (0,1)$. Основное предположение состояло в том, что функция H достигает глобального максимума в единственной внутренней точке $\overline{x}$ отрезка $[0,1]$, и в некоторой окрестности этой точки функции $h_\pm$ бесконечно дифференцируемы. Первый основной результат работы – полные асимптотические разложения для двупараметрического семейства собственных значений и соответствующих собственных функций рассматриваемого оператора. Асимптотики являются степенными по малому параметру, при этом асимптотики собственных функций носят характер пограничного слоя в окрестности точки $\overline{x}$. Отдельно выписаны явные формулы для первых четырёх членов асимптотик. Второй основной результат состоит в описании нижних собственных значений. А именно, показано, что для любого натурального N для достаточно малых ε первые N нижних собственных значений – это определённые собственные значения из одной из упомянутых серий. Для наименьшего собственного значения явно выписаны первые шесть членов асимптотического разложения. Рассмотрен ряд примеров, для которых применены упомянутые результаты. Было проведено сравнение асимптотических разложений с численными результатами, в некоторых случаях асимптотические разложения давали достаточно точные приближения истинных собственных значений.

Другое

- 10 октября 2008 г. защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук в диссертационном совете при Институте математики с ВЦ УНЦ РАН
- Присуждена Медаль РАН с премией для молодых ученых в области математики за 2007 г.
- Присуждена Премия Европейской Академии для молодых ученых России по разделу "Математика/механика"

Преподавательская деятельность

В 2008/09 учебном году я читаю курс "Математического анализа" студентам второго курса и спецкурс "Спектральная теория неограниченных операторов" студентам четвёртого, пятого курсов и аспирантам. Курсы читаются на физико-математическом факультете Башкирского государственного педагогического университета и на математическом факультете Башкирского государственного университета.