Отчёт за 2007-2009 годы

Сергей Локтев

Основные результаты за 2007-2009 годы изложены в следующих работах:

[1] P.Etingof, S.Loktev, A.Oblomkov, L.Rybnikov, A Lie-theoretic construction of spherical symplectic reflection algebras, Transformation Groups, 13 (2008), no. 3, pp. 541-556, arxiv:0801.2339

[2] S.Loktev, Weight Multiplicity Polynomials of multi-variable Weyl Modules, Moscow Math. J., в печати, arxiv:0806.0170

[3] N.Guay, D.Hernendez, S.Loktev, Double affine Lie algebras and finite groups, Pacific Math Journal, 243 (2009), no. 1, 1–41, arxiv:0901.3205

[4] S.Loktev, S.Natanzon, Generalized Topoligical Field Theories from Group Representations, arxiv:0910.3813

Работа [2] посвящена комбинаторике модулей Вейля над алгеброй токов на аффинных многообразиях со значениями в редуктивной алгебре Ли. Напомню, что модули Вейля — основной объект исследований в рамках проекта, определяются как универсальные конечномерные модули, порождённые общим собственным вектором для токов со значениями в борелевской подалгебре.

Обнаружилось, что для каждого α из решётки корней размерность весового подпространства модуля Вейля веса $\lambda - \alpha$, где λ — старший вес, является многочленом от отметок веса λ_i при достаточно больших λ_i (а в неособом случае и при любом λ). В работе эта гипотеза проверяется в ряде случаев для многообразий малой размерности, в том числе получены явные формулы для этих многочленов в неособом случае для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_r$ вплоть до размерности три. Для размерности два эти формулы включают числа Каталана Фуса-Каталана и Нараяны в семейство симметрических многочленов, занумерованных диаграммами Юнга, с квадратичным рекуррентным соотношением. Для веса, кратного весу векторного представления, эти характеры связаны двойственностью Шура-Вейля с характером представления симметрической группы в пространстве диагональных и триагональных гармоник, что отражено в следующей таблице (формулы в последнем столбце пока являются гипотетическими).

d	1	2	3
$\dim W_{n\omega_1}$	$\begin{bmatrix} n+r \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r(n+1) \\ n \end{bmatrix} \Big/ (n+1)$	$r\begin{bmatrix} (2r-1)(n+1) \\ n-1 \end{bmatrix} \Big/ \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\dim W_{n\omega_1}^{k_1\varepsilon_1+\dots+k_r\varepsilon_r}$	$\frac{n!}{k_1!\dots k_r!}$	$\begin{bmatrix} n+1 \\ k_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+1 \\ k_2 \end{bmatrix}\dots\begin{bmatrix} n+1 \\ k_r \end{bmatrix} \Big/ (n+1)$	$2^r(n+1)^{r-2}\prod_{i=1}^{r}\frac{\begin{bmatrix} 2(n+1)-k_i \\ k_i \end{bmatrix}}{2(n+1)-k_i}$
$\dim DH_n(A)$	$n!$	$(n+1)^{n-1}$	$2^n(n+1)^{n-2}$
$\chi_{k_1,\dots,k_m}$	$n!\delta_{mn}$	$(n+1)^{m-1}$	$(n+1)^{m-2}\prod_{i=1}^{m}\begin{bmatrix} 2k_i \\ k_i \end{bmatrix}$

Здесь первые две строки — размерности модулей Вейля для $\mathfrak{gl}_r \otimes \mathbb{C}[x^1, \dots, x^d]$ и его весовых подпространств, третья — размерность факторкольца многочленов от dn переменных по идеалу, порождённому S_n-инвариантами с нулём в начале координат, в четвёртой строчке — след действия на нём перестановки, составленной из циклов длины $k_1, \dots, k_m$, умноженный на знак этой перестановки.

В работе [3] исследуются представления аналогов алгебры токов для некоммутативных многообразий, а именно, алгебры Ли матриц, элементы которых принадлежат некоммутативной алгебре. Вопрос о существовании модулей Вейля в этом случае более тонкий, но это выполняется, в частности, если эта некоммутативная алгебра является PBW-алгеброй, то есть плоской деформацией алгебры многочленов. Здесь описываются модули Вейля для сплетённого произведения групповой алгебры и многочленов на пространстве представления этой группы. Часть результатов касается и квантового аналога такой алгебры токов для двумерного представления. Эта алгебра двойственна по Шуру-Вейлю обобщённой рациональной двойной аффинной алгебра Гекке, представления которой изучаются в [1].

В работе [1] исследуются алгебры симплектических отражений — построенные П.Этингофом и В.Гинзбургом универсальные деформации сплетённого произведения групповой алгебры и многочленов на представлении с инвариантной невырожденной симплектической формой. В качестве группы берётся полупрямое произведение симметрической группы S_n и конечной подгруппы $SL_2 \cong SP_2$ (они соответствуют диаграммам Дынкина с простыми связями), в качестве представления — естественное действие на $2n$-мерном пространстве. Для тривиальной группы эта деформация известна, как рациональная двойная аффинная алгебра Гекке, для $n = 1$ она связана с препроективной алгеброй соответствующего колчана, случай циклической группы (соответствующей диаграмме A_n) также хорошо изучен. Для случая звёздчатых диаграмм (все E и D_4) в [1] предложена конструкция сферической подалгебры этой алгебры с помощью квантовой гамильтоновой редукции из универсальной обёртывающей алгебры полупростой алгебры Ли (вида $sl_r \oplus \cdots \oplus sl_r$). Эта конструкция позволяет из представлений этой алгебры Ли (в том числе бесконечномерных) строить представления алгебры симплектических отражений, причём любое её сферическое представление может быть получено таким образом. Приводятся констукции ранее известных семейств представлений в терминах представлений полупростых алгебр в функциях на орбитах.

В [4] теория представлений прилагается к построению топологических теорий поля: по вещественным представлениям конечной группы строится Клейнова топологическая теория поля, корелляторы в которой определены на двумерных многообразиях с отмеченными точками, при этом поверхность не обязательно ориентируема и может быть с краем. Такие топологические теории задаются оснащёнными алгебрами Карди-Фробениуса: парой (A, B) алгебр Фробениуса, в которой A коммутативна, с отображением A в центр B и анти-инволюцией на B, удовлетворяющим набору условий согласования этих структур. В работе предложена конструкция комплексных полупростых оснащённых алгебр Карди-Фробениуса в терминах полупростых вещественных ассоциативных алгебр. Также структура алгебры Карди-Фробениуса определяется на паре $(Z[G], \mathrm{End}_G(\pi))$, где G — конечная группа, $Z[G]$ — центр групповой алгебры, π — конечномерное представление G с инвариантной невырожденной билинейной формы (с её помощью строится анти-инволюция). Показано, что в частном случае представления, возникающего из действия группы на множестве, эта конструкция даёт известную алгебру Карди-Фробениуса, используемую при подсчёте числа накрытий.

Результаты докладывались на следующих конференциях:

1) Methodes geometriques en theorie des representations, (Fourier institute, Франция, июль 2008), доклад

2) Harish-Chandra Research Institute International conference in mathematics, доклад (HRI, Индия, март 2009)

3) Representation Theory and Lie Theory, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, постер (Newton Institute, UK , июнь 2009)

4) Летняя школа "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов курс лекций (Самара, Июнь 2009)

5) Geometric Aspects of Quantum Theory and Integrable Systems, доклад (KdV Institute, Нидерланды, октябрь 2009)

а также на регулярных семинарах в MIT (Бостон) и MSRI (Бёркли).

В 2008-2009 году был прочитан 3-семестровый курс алгебры в НМУ. Кроме того, проводились занятия в математическом классе выпуска 2010 года школы 57.