

Отчет Ивана Аржанцева по гранту Пьера Делиня за 2010 год

Работы, опубликованные или подготовленные в 2010 году

- [1] И.В. Аржанцев и С.А. Гайфуллин. Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий. Математический Сборник 201:1 (2010), 3–24; English transl.: Sbornik: Math. 201 (2010), no. 1, 1–21; arXiv: 0810.1148
- [2] I.V. Arzhantsev and S.A. Gaifullin. Homogeneous toric varieties. J. Lie Theory 20 (2010), no. 2, 283–293; arXiv: 0908.1851
- [3] I.V. Arzhantsev. Flag varieties as equivariant compactifications of \mathbb{G}_a^n . Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 3, 783–786; arXiv: 1003.2358
- [4] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan and M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Prepublication de l'Institut Fourier, hal-00463347, 25 pages; сдана в печать; arXiv: 1003.3164
- [5] I.V. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen and A. Laface. Cox rings. arXiv: 1003.4229
- [6] I.V. Arzhantsev, E.A. Makedonskii and A.P. Petravchuk. Finite-dimensional subalgebras in polynomial Lie algebras of rank one. Сдана в печать, arXiv: 1005.1415
- [7] I.V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch and M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Сдана в печать, arXiv: 1011.5375

Основные результаты, полученные в 2010 году

В работе [3] мы продолжаем изучение локальной транзитивных действий коммутативной унипотентной группы \mathbb{G}_a^n на проективных многообразиях. Для произвольной полупростой алгебраической группы G найдены все параболические подгруппы P , для которых обобщенное многообразие флагов G/P допускает такое действие. Этот результат основан на отсутствии нетривиальных деформаций унипотентного радикала параболической подалгебры к коммутативной подалгебре.

Цель обзора [5] — собрать и изложить в доступной форме известные к настоящему моменту сведения о кольцах Кокса алгебраических многообразий и их приложениях в коммутативной алгебре, алгебраической геометрии, теории представлений и теории чисел. В настоящее время написаны три из запланированных шести глав этой книги.

Работа [6] посвящена изучению полиномиальных алгебр Ли в смысле работы В. М. Бухштабера и Д. В. Лейкина (2002). Пусть $W_n(\mathbb{K})$ — это алгебра Ли

дифференцирований алгебры многочленов $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} нулевой характеристики. Подалгебра $L \subset W_n(\mathbb{K})$ называется полиномиальной, если она является подмодулем $\mathbb{K}[X]$ -модуля $W_n(\mathbb{K})$. Мы показываем, что если L имеет ранг 1, то централизатор любого ненулевого элемента из L коммутативен. Это позволяет классифицировать конечномерные подалгебры в полиномиальных алгебрах Ли ранга 1.

Работы [4] и [7] посвящены изучению группы специальных автоморфизмов аффинных алгебраических многообразий, т.е. подгруппы группы автоморфизмов, порожденной одномерными унитарными подгруппами. Мы называем аффинное многообразие гибким, если касательное пространство в любой его гладкой точке порождено сечениями локально нильпотентных векторных полей. Основным результатом работы [7] состоит в том, что для многообразий размерности не ниже двух гибкость равносильна транзитивности действия группы специальных автоморфизмов на гладких точках многообразия, что в свою очередь влечет бесконечную транзитивность такого действия. Помимо этого в работе [7] доказан ряд геометрических свойств гибких многообразий и развита более общая теория так называемых алгебраически порожденных групп автоморфизмов алгебраических многообразий. В работе [4] доказано, что гибкими являются нормальные конуса над многообразиями флагов, невырожденные аффинные торические многообразия, а также надстройки над гибкими аффинными многообразиями.

Результаты работ [1] и [2] отражены в моих отчетах за 2008 и 2009 годы соответственно.

Участие в конференциях и семинарах

Алгебраический семинар института Фурье, Гренобль, Франция, 18 января 2010 года, доклад "Локальные алгебры и действия унитарных групп".

Семинар по алгебраической геометрии Свободного университета, Берлин, Германия, 19 июля 2010 года, доклад "Эквивариантные компактификации коммутативных унитарных групп".

Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, Билефельд, Германия, 24-26 июля 2010 года, доклад "Эквивариантные компактификации коммутативных унитарных групп".

Второй летний семинар по алгебраической геометрии, Тюбинген, Германия, 29-30 июля 2010 года, доклад "Специальные автоморфизмы торических многообразий".

Семинар по алгебре института Проблем Передачи Информации (ИППИ РАН), Москва, 8 октября 2010 года, доклад "Вложения однородных пространств

и геометрическая теория инвариантов".

Алгебраический семинар Киевского Национального университета им. Т. Г. Шевченко, Киев, Украина, 1 ноября 2010 года, доклад "Бесконечная транзитивность для специальных автоморфизмов аффинных многообразий".

Международная алгебраическая конференция, посвященная 80-летию кафедры высшей алгебры МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева, 15-18 ноября 2010 года, Москва, доклад "Комбинаторные методы в геометрической теории инвариантов".

Семинар по алгебре и геометрии Бранденбургского Технического университета, Коттбус, Германия, 24 ноября 2010 года, доклад "Бесконечная транзитивность для специальных автоморфизмов аффинных многообразий".

Семинар отдела алгебры МИРАН им. В. А. Стеклова, Москва, 30 ноября 2010 года, доклад "Группа автоморфизмов гибкого аффинного многообразия бесконечно транзитивна".

Педагогическая работа

В текущем году я продолжаю проводить семинарские занятия по алгебре на 1-2 курсах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, вхожу в число руководителей научно-исследовательского семинара "Группы Ли и теория инвариантов" (совм. с Э.Б. Винбергом, А.Л. Онищиком и Д.А. Тимашевым), участвую в проведении учебных спецсеминаров по алгебраической геометрии, теории представлений, группам и алгебрам Ли, алгебраическим группам и теории инвариантов (совм. с Э.Б. Винбергом и Д.А. Тимашевым), читаю спецкурс "Дополнительные главы теории инвариантов" для студентов 4-5 курсов и аспирантов. Руководжу работой 6 аспирантов и 4 студентов. Недавно окончившая аспирантуру Елена Шаройко представила кандидатскую диссертацию. Участвую в организации и проведении студенческих олимпиад по алгебре на мех-мат факультете МГУ. Активно работаю в оргкомитете второй школы-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов" для молодых российских ученых, аспирантов и студентов старших курсов, которая пройдет в феврале 2011 года на механико-математическом факультете МГУ.

Подготовленные в этом году работы студентов и аспирантов:

[1] П.Ю. Котенкова. GIT-эквивалентность и диагональные действия. Принята в Математические Заметки. arXiv: 1003.3528 [math/AG]

[2] А.Ю. Perepechko: On solvability of the automorphism group of a finite-dimensional algebra. Сдана в печать, arXiv: 1012.0237 [math/AG]

[3] К.Г. Kuyumzhiyan: Simple Modules of Classical Linear Groups with Normal Closures of Maximal Torus Orbits. Сдана в печать, arXiv: 1009.4724 [math/AG]

[4] R.A. Devyatov: Generically transitive actions on multiple flag varieties. Сдана в печать, arXiv: 1007.1353 [math/AG]

[5] S.N. Fedotov: Framed moduli and Grassmannians of submodules. Сдана в печать, arXiv: 1010.4761 [math/AG]

Итоги работы по гранту Пьера Делиня за 2008-2010 годы

В рамках проекта "Алгебраические группы преобразований и конструкция Кокса", поддержанного грантом Пьера Делиня, были получены следующие основные результаты.

1) *Кольца Кокса.* Исследованы свойства кольца Кокса $R(X)$ алгебраического многообразия X с конечно порожденной группой классов дивизоров $Cl(X)$ и связанной с ним фактор-реализации Кокса $\hat{X} \rightarrow X$. Доказано, что кольцо $R(X)$ является однородно факториальным относительно $Cl(X)$ -градуировки, тогда как в случае наличия кручения в группе $Cl(X)$ факториальность может нарушаться. Доказана теорема о подъеме автоморфизмов на реализацию Кокса в случае аффинных многообразий. Использование подъема автоморфизмов позволило классифицировать все торические многообразия, на которых транзитивно действует полупростая группа (совм. с С. А. Гайфуллиным). Реализация Кокса найдена для некоторых классов аффинных многообразий, например, для факторов по действию конечных линейных групп и для некоторых многообразий двойных смежных классов. Используя реализацию Кокса, построенную в работе В. В. Батырева и Ф. Хаддад, удалось доказать, что группа специальных автоморфизмов транзитивно действует на гладких точках произвольного нормального аффинного $SL(2)$ -вложения. Написана значительная часть монографии о кольцах Кокса (совм. с U. Derenthal, J. Hausen и A. Laface).

2) *Геометрическая теория инвариантов.* Изучался вопрос существования категорного фактора для действия нередуктивной алгебраической группы на нормальном алгебраическом многообразии. Назовем действие аффинной алгебраической группы G на нормальном многообразии X факториальным, если каждый G -инвариантный простой дивизор на X является множеством нулей некоторой регулярной инвариантной функции. Например, факториальными являются произвольные действия унипотентной или полупростой группы на факториальном квазиаффинном многообразии. Получен критерий существования категорного фактора для факториальных действий в категории алгебраических многообразий. В случае, когда алгебра инвариантов конечно порождена, доказано, что категорный фактор всегда существует в категории конструктивных пространств. Эти результаты получены совместно с D. Celik и J. Hausen.

3) *Действия коммутативной унипотентной группы.* Известное соответствие Хассетта-Чинкеля устанавливает биекцию между конечномерными коммутативными ассоциативными локальными алгебрами и локально транзитивными действиями коммутативных унипотентных групп \mathbb{G}_a^n на проективных пространствах. Основываясь на этом соответствии и его обобщениях, в совместной работе с Е. В. Шаройко найдена модальность локально транзитивного \mathbb{G}_a^n -

действия на проективном пространстве, классифицированы действия модальности один и охарактеризованы локально транзитивные G_a^n -действия на проективных гиперповерхностях данной степени. Также для данной полупростой группы G найдены все параболические подгруппы P , для которых обобщенное многообразие флагов G/P допускает локально транзитивное G_a^n -действие. Эти результаты естественно рассматривать как частные случаи возможной общей теории проективных вложений однородных пространств нередуктивных групп.

4) *Автоморфизмы аффинных многообразий*. Назовем группой специальных автоморфизмов аффинного многообразия X подгруппу группы автоморфизмов, порожденную одномерными унитарными подгруппами. Будем говорить, что аффинное многообразие является гибким, если касательное пространство в любой его гладкой точке порождено сечениями локально нильпотентных векторных полей. В совместной работе с Н. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch и М. Zaidenberg доказано, что для многообразий размерности не ниже двух гибкость равносильна транзитивности действия группы специальных автоморфизмов на гладких точках многообразия, что в свою очередь влечет бесконечную транзитивность такого действия. В этой же работе доказан ряд геометрических свойств гибких многообразий и развита более общая теория так называемых алгебраически порожденных групп автоморфизмов алгебраических многообразий. В совместной работе с К. Г. Куюмжиян и М. Г. Зайденбергом показано, что гибкими являются нормальные конуса над многообразиями флагов, невырожденные аффинные торические многообразия, а также надстройки над гибкими аффинными многообразиями.

Все это позволяет утверждать, что предложенный три года назад проект в основном реализован. По результатам этих и выполненных ранее работ мною подготовлена докторская диссертация "Вложения однородных пространств и геометрическая теория инвариантов", которая сейчас представлена к защите.