ОТЧЕТ ПОЛУЧАТЕЛЯ СТИПЕНДИИ П. ДЕЛИНЯ ЗА 2009 ГОД

Л. Е. ПОСИЦЕЛЬСКИЙ

1. Основные полученные результаты

Важнейшие результаты, над которыми я работал в этом году, были в первоначальном виде получены в 1999 и 2000–2002 годах. В этом году они были усилены, дополнены и опубликованы в моем препринте `arXiv:0905.2621 [math.CT]`. Ниже приводятся формулировки этих результатов в их окончательном виде, в котором они вошли в указанный препринт.

Под коалгеброй всюду ниже понимается коассоциативная коалгебра с коединицей над полем k.

- В теории DG-комодулей над DG-коалгеброй, рассматриваемых с точностью до квазиизоморфизма, существует достаточное количество инъективных резольвент, а в теории DG-контрамодулей – проективных резольвент. Формально, производная категория DG-комодулей эквивалентна гомотопической категории инъективных DG-комодулей, а производная категория DG-контрамодулей – гомотопической категории проективных DG-контрамодулей.

  Кроме того, любой проективный DG-контрамодуль над DG-коалгеброй C с точностью до гомотопической эквивалентности можно получить из DG-контрамодуля $\mathrm{Hom}_k(C,k)$ с помощью сдвигов, конусов и бесконечных прямых сумм. (Неизвестно, верно ли аналогичное утверждение для DG-комодулей.)
- Для любой CDG-коалгебры (DG-коалгебры с кривизной) $C=(C,d,h)$, следующие четыре триангулированные категории эквивалентны между собой:
  (i) копроизводная категория левых CDG-комодулей над C;
  (ii) гомотопическая категория левых CDG-комодулей над C, инъективных как градуированные C-комодули;
  (iii) гомотопическая категория левых CDG-контрамодулей над C, проективных как градуированные C-контрамодули;
  (iv) контрапроизводная категория левых CDG-контрамодулей над C.

  Кроме того, эти триангулированные категории компактно порождены; компактными образующими категории (ii) являются тотально конечномерные CDG-комодули. Триангулированная подкатегория компактных объектов в (ii) эквивалентна абсолютной производной категории тотально конечномерных CDG-комодулей.

- Для CDG-кольца $B = (B, d, h)$, копроизводная категория левых CDG-модулей над B эквивалентна гомотопической категории CDG-модулей, инъективных как градуированные B-модули, по крайней мере, когда градуированное кольцо B удовлетворяет следующему условию:
  (∗) счетные прямые суммы инъективных левых градуированных B-модулей имеют конечную инъективную размерность (как градуированные B-модули).

  Это включает случаи, когда градуированное кольцо B нетерово слева или имеет конечную левую гомологическую размерность, а также случай, когда градуированное кольцо B горенштейново слева (см. ниже).

  Для CDG-кольца $B = (B, d, h)$, контрапроизводная категория левых CDG-модулей над B эквивалентна гомотопической категории CDG-модулей, проективных как градуированные B-модули, по крайней мере, когда градуированное кольцо B удовлетворяет следующему условию:
  (∗∗) счетные прямые произведения проективных левых градуированных B-модулей имеют конечную проективную размерность (как градуированные B-модули).

  Это включает случай, когда градуированное кольцо B когерентно справа и всякий плоский левый B-модуль имеет конечную проективную размерность. (Известно, что последнему условию удовлетворяет любое кольцо, мощность которого не превышает $\aleph_n$ для конечного натурального n.) В частности, сюда входят артиновы справа градуированные кольца. Кроме того, условию (∗∗) удовлетворяют градуированные кольца конечной левой гомологической размерности, и, более общо, горенштейновы слева.
- Будем называть градуированное кольцо B горенштейновым слева, если классы градуированных левых B-модулей конечной проективной размерности и конечной инъективной размерности совпадают. Для любого CDG-кольца $B = (B, d, h)$, такого что градуированное кольцо B горенштейново слева, следующие пять триангулированных категорий эквивалентны:
  (i) копроизводная категория левых CDG-модулей над B;
  (ii) гомотопическая категория левых CDG-модулей над B, инъективных как градуированные B-модули;
  (iii) абсолютная производная категория CDG-модулей над B, имеющих конечную инъективную/проективную размерность как градуированные B-модули;
  (iv) гомотопическая категория левых CDG-модулей над B, проективных как градуированные B-модули;
  (v) контрапроизводная категория левых CDG-модулей над B.

  Кроме того, для DG-кольца B, подлежащее градуированное кольцо которого горенштейново слева, можно построить теорию тейтовских когомологий. Тейтовские когомологии – это функтор двух аргументов, определенный на производной категории DG-модулей, но факторизующийся через триангулированную категорию, “измеряющую разницу” между копроизводной = контрапроизводной и производной категориями.

- Для любого CDG-кольца (B, d, h), такого что кольцо B нетерово слева, абсолютная производная категория левых CDG-модулей над B, конечно-порожденных как градуированные B-модули, является полной подкатегорией в копроизводной категории левых CDG-модулей над B. Эта полная триангулированная подкатегория состоит из компактных объектов (но неизвестно, порождает ли она всю копроизводную категорию как триангулированную категорию с бесконечными прямыми суммами).
- Для кофибрантной DG-алгебры над кольцом конечной гомологической размерности, производная, копроизводная и контрапроизводная категории DG-модулей совпадают.
- Всякой CDG-коалгебре C можно сопоставить CDG-алгебру B над k — кобар-конструкцию C. Копроизводная = контрапроизводная категория левых CDG-модулей над B эквивалентна копроизводной категории левых CDG-комодулей над C и контрапроизводной категории левых CDG-контрамодулей над C (“кошулева тройственность”).

  Когда CDG-коалгебра C коаугментирована и конильпотентна, CDG-алгебра B оказывается на самом деле DG-алгеброй, и при этом производная категория левых DG-модулей над B эквивалентна копроизводной категории левых CDG-комодулей над C и контрапроизводной категории левых CDG-контрамодулей над C.
- Категория ненулевых DG-алгебр над k, локализованная по классу квазиизоморфизмов, эквивалентна категории (коаугментированных и) конильпотентных CDG-коалгебр над k, локализованной по классу фильтрованных квазиизоморфизмов.
- Категория строго унитальных A_∞-алгебр и строго унитальных A_∞-морфизмов между ними эквивалентна категории коаугментированных CDG-коалгебр, подлежащие градуированные коалгебры которых являются косвободными конильпотентными (тензорными) коалгебрами.

  Аналогично, категория строго унитальных CA_∞-коалгебр (A_∞-коалгебр с кривизной) и строго унитальных CA_∞-морфизмов между ними эквивалентна категории CDG-алгебр, подлежащие градуированные алгебры которых являются свободными ассоциативными алгебрами.
- Копроизводная категория CA_∞-комодулей и контрапроизводная категория CA_∞-контрамодулей над (строго унитальной) CA_∞-коалгеброй естественно эквивалентны (комодульно-контрамодульное соответствие для CA_∞-коалгебр). Это следует из результатов о копроизводной = контрапроизводной категории CDG-модулей над CDG-алгеброй, подлежащая градуированная алгебра которой свободна.

- В категории конильпотентных (так же, как и произвольных) CDG-коалгебр нет универсального конечного объекта. Добавим его формально и получим “финализованную” категорию конильпотентных CDG-коалгебр. Эта категория произвольные пределы и копределы, а также естественную структуру замкнутой модельной категории.

  Класс слабых эквивалентностей порождается фильтрованными квазиизоморфизмами, корасслоения суть инъективные морфизмы, а является ли морфизм CDG-коалгебр расслоением, зависит тоже только от подлежащего морфизма градуированных коалгебр. Условие на последний состоит в том, что верхняя коалгебра, как конильпотентная коалгебра, должна косвободно копорождаться нижней коалгеброй и каким-то градуированным векторным пространством.
- Векторному расслоению на аффинном гладком алгебраическом многообразии можно сопоставить алгебру дифференциальных операторов, действующих в сечениях этого расслоения. Выбрав в этом расслоении связность, можно также получить структуру CDG-алгебры на алгебре дифференциальных форм с коэффициентами в эндоморфизмах исходного расслоения (с дерамовским дифференциалом, зависящим от связности и имеющим ненулевой квадрат). Когда многообразие неаффинно, получается когерентный пучок CDG-алгебр.

  Ограниченная производная категория когерентных модулей над пучком колец дифференциальных операторов эквивалентна абсолютной производной категории когерентных CDG-модулей над пучком CDG-алгебр де Рама. (Аналогичный результат для неограниченной производной категории квазикогерентных D-модулей был опубликован несколько ранее; см. отчет за 2008 год. Когерентный случай является для этой теории более сложным, чем квазикогерентный.)
- Можно также задаться вопросом об описании производной категории точной категории фильтрованных D-модулей (с фильтрацией, согласованной с естественной фильтрацией на дифференциальных операторах). Любому CDG-кольцу B сопоставляется градуированное кольцо $B^\sim$ порожденное B и элементом δ с соотношениями $d(b) = [\delta, b]$ и $\delta^2 = h$. Производная категория фильтрованных D-модулей описывается в терминах производной категории градуированных модулей над алгеброй $B^\sim$, связанной с дерамовской CDG-алгеброй (B, d, h).

  Отдельный интерес представляет случай неограниченно фильтрованных D-модулей (о котором имеет смысл говорить в случае аффинного многообразия). Производная категория полно и кополно неограниченно фильтрованных D-модулей эквивалентна полупроизводной категории градуированных модулей над $B^\sim$ относительно ограничения структуры до структуры градуированных модулей над B. Здесь полупроизводная категория определяется как факторкатегория гомотопической категории комплексов градуированных $B^{\sim}$-модулей по триангулированной категории комплексов модулей, коацикличных или контраацикличных над B. Аналогичный результат имеет место для любой неоднородной кошулевой фильтрованной алгебры.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

2.1. Опубликован препринт `arXiv:0905.2621 [math.CT]`, 135 стр. В настоящее время эта работа рассматривается в журнале Astérisque.

2.2. Совместная с Р. Безрукавниковым работа: Roman Bezrukavnikov, Leonid Positselski. On semi-infinite cohomology of finite dimensional graded algebras. (`arXiv:0803.3252 [math.QA]`, 17 стр.), поданная в журнал Compositio Math. в 2008 году, была в 2009 году принята к печати этим журналом.

См. `http://www.lms.ac.uk/publications/compositio/forthcoming.html`

2.3. Заключен контракт с издательством Birkhäuser Basel, предусматривающий публикацию в 2010 году моей монографии в серии Monografie Matematyczne на основе препринта: Leonid Positselski. Homological algebra of semimodules and semicontramodules. With appendices coauthored by S. Arkhipov and D. Rumynin. `arXiv:0708.3398 [math.CT]`, 310 стр.

См. `http://www.springer.com/birkhauser/mathematics/book/978-3-0346-0435-2`

3. Участие в конференциях, доклады на семинарах

3.1. Я участвовал в конференции "Молодая математика России" (конференция победителей конкурсов П. Делиня и фонда "Династия"), 12–13 января 2009 года. Сделал получасовой доклад на тему "Полубесконечные гомологии ассоциативных алгебраических структур".

См. `http://www.mccme.ru/lifr/ddconf2008/index.htm`

3.2. Я сделал часовой доклад на тему "Koszul Triality" на семинаре по алгебре в Институте Анри Пуанкаре в Париже 6 апреля 2009 г. Этот мой доклад упоминается в разделе "Acknowledgement" работы `arXiv:0905.3845 [math.KT]` авторства B. Keller, W. Lowen, P. Nicolás.

3.3. Я участвовал в конференции (workshop) "Triangulated Categories and Singularities" 26–30 мая 2009 года в Падерборне, Германия. Я не делал доклада в Падерборне, но имел очень полезные обсуждения с участниками конференции в перерывах, повлиявшие на мою работу.

См. `http://www2.math.uni-paderborn.de/ags/pbrep/meetings/triangulated-categories-and-singularities.html`

4. Работа в научных центрах

С 1 марта по 30 апреля 2009 года я был визитором в институте IHÉS в городе Бюр-сюр-Иветт, Франция. В результате имевших место обсуждений, в мою работу `arXiv:0905.2621` (см. Remark 7.3) был включен набросок доказательства следующего результата, основные идеи формулировки и доказательства которого принадлежат профессору IHÉS М. Концевичу.

- Всякий CA_∞-модуль над CA_∞-алгеброй (A_∞-алгеброй с кривизной) над полем (с ненулевым элементом кривизны) стягиваем. Это верно также и для строго унитальных CA_∞-модулей над строго унитальной CA_∞-алгеброй с кривизной. Если у такой алгебры элемент кривизны не пропорционален единичному элементу (последнее невозможно в случае $\mathbb{Z}$-градуировки, но может иметь место в случае $\mathbb{Z}_2$-градуировки), то класс строго унитального A_∞-изоморфизма такой алгебры зависит только от размерностей ее градуировочных компонент.

5. Педагогическая деятельность

В марте-апреле 2009 года я прочитал сетевой миникурс на тему "Комодульно-контрамодульное соответствие и представления бесконечномерных алгебр Ли". Организатором курса выступил Физматклуб при ПОМИ РАН. Курс состоял из пяти двухчасовых лекций и читался по интернету через `www.webex.com`.

Записи лекций доступны в интернете со страницы
`http://club.pdmi.ras.ru/moodle/course/view.php?id=10`