

Отчет о проведенных исследованиях в рамках проекта Талалаева Дмитрия

“Алгебро-геометрические методы в квантовых интегрируемых системах”

1 Краткое описание цели проекта

Проект направлен на построение аналога метода решения классических интегрируемых систем, основанном на конструкции Хитчина. В квантовом случае объекты радикально видоизменяются, так отправной точкой работы над проектом стала конструкция квантового аналога спектральной кривой для рациональной системы Годена произвольного ранга, который является дифференциальным оператором со значениями в квантовой алгебре и производящей функцией квантовых гамильтонианов. За истекший период работы над проектом конкурсантом были получены новые результаты:

- [1] описание действия геометрических операторов Гекке на спектре квантовой системы Годена, использующее так называемую "изонодромную" формулировку уравнений Бете в работе “Bethe ansatz and Isomonodromic transformations” math-ph 0802.0383;
- [2] построение квантового аналога спектральной кривой для эллиптической системы Годена в совместной работе с В. Рубцовым и А. Силантьевым “Quantum Elliptic Gaudin system” ИТЕР-ТН-56/08.

2 Описание результатов

2.1 Действие операторов Гекке на спектре системы Годена

Данная деятельность связана с постановкой задачи 1 проекта, а именно с задачей построения эффективных методов решения квантовых интегрируемых систем. Основным методом решения является так называемый метод анзаца Бете, сводящий задачу описания спектра к системе алгебраических уравнений Бете. В работе [1] было найдено семейство операторов геометрического происхождения, действующих на пространстве собственных векторов Бете. Для этого используется форма уравнений Бете, апеллирующая к свойствам монодромии дифференциального оператора, называемого G -опером. Этот оператор в рассматриваемом случае алгебры \mathfrak{sl}_2 является оператором Штурма-Лиувилля с полюсами второго порядка в k фиксированных точках, а свойство, эквивалентное системе уравнений Бете, состоит в том, что монодромия такого оператора лежит в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^k$. По оператору Штурма-Лиувилля строится связность ранга 2 с простыми полюсами, монодромия которой удовлетворяет такому же свойству. На пространстве таких связностей рассматривается действие перестроек Гекке, которые не меняют монодромию. В результате возникает семейство преобразований, которые действуют на старших весах представлений, а также на множествах корней Бете.

Предположительно, построенное дискретное семейство преобразований восполняет недостаток аналогии между арифметическим соответствием Ленглендса и его геометрическим вариантом над \mathbb{C} в части построения L -функций на стороне Галуа.

2.2 Квантовая эллиптическая система Годена

Результат работы [2] относится к обобщениям подхода квантования системы Годена. Эллиптическая система Годена описывается оператором Лакса вида

$$L(u; \lambda_k) = \sum_{ij=1}^n E_{ij} \otimes e_{ji}(u; \lambda_k) \quad (1)$$

где коэффициенты определяются выражениями:

$$e_{ii}(u; \lambda_k) = \sum_{s=1}^N \frac{\theta'(u - v_s)}{\theta(u - v_s)} e_{ii}^{(s)}, \quad (2)$$

$$e_{ij}(u; \lambda_k) = \sum_{s=1}^N \frac{\theta(u - v_s + \lambda_{ij})}{\theta(u - v_s)\theta(\lambda_{ij})} e_{ij}^{(s)}, \quad (3)$$

где $\theta(u)$ - θ -функция Римана, а $e_{ij}^{(s)}$ - генераторы s -ой копии алгебры Ли \mathfrak{gl}_n . Для такой системы удалось построить квантование, то есть построить коммутативную алгебру в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes k}$, и так же как в рациональном случае построить производящую функцию гамильтонианов в виде деформированного характеристического полинома для оператора Лакса.

Как и в рациональном случае данный характеристический полином при ограничении на собственное значение определяет уравнение на собственную функцию в разделенных переменных и характеризует своими свойствами монодромии условия анзаца Бете.

3 Публикации и участие в конференциях

- Принято к публикации в журнал Теоретической и математической физики "Анзац Бете и изомонодромные деформации"
- Принято к публикации из работ написанных ранее: Сборник ПОМИ "Уравнение КЗ, G -оперы, квантовая редукция Дринфельда-Соколова и квантовое тождество Гамильтона-Кэли".

Конференции 2008 год:

- Протвино: Международный семинар по классическим и квантовым интегрируемым системам SQIS-08, около 150 участников, доклад "Анзац Бете и изомонодромные деформации".
- Бонн: Workshop "Elliptic integrable systems, isomonodromy problems, and hypergeometric functions" около 50 участников.