

# Отчет о проведенных исследованиях в рамках проекта Талалаева Дмитрия:

## “Алгебро-геометрические методы в квантовых интегрируемых системах”

### 1 Краткое описание цели проекта

В основном проект направлен на построение квантового аналога метода решения классических интегрируемых систем, основанного на конструкции спектральной кривой и лагранжева слоения, определяемого отображением Абеля. Основой проекта была конструкция квантового характеристического полинома для квантовой системы Годена [1], которая играет исключительную роль в решении квантовой системы, как в терминах разделенных переменных, так и на языке метода анзаца Бете. Кроме этого, конструкция квантовой спектральной кривой позволила явно описать геометрическое соответствие Ленглендса над полем  $\mathbb{C}$  [2] и представляет отдельный интерес в рамках некоммутативно-геометрических методов.

### 2 Основные задачи и результаты проекта

Центральными задачами проекта в рамках развития квантового метода спектральной кривой, которые сопровождались новыми результатами, были: расширение области его применения (ранее была известна конструкция только для рациональной системы Годена), а также построение эффективного описания спектра квантовых систем, что в терминах метода спектральной кривой имеет непосредственное отношение к квантованию отображения Абеля. В частности были построены квантования эллиптической версии системы Годена [4], которая расширяет возможности метода до класса систем типа Хитчина на кривых с особенностями с эллиптической нормализацией; а также квантование полной цепочки Годы [6], которая имеет принципиально иную природу и тесно связана с такими современными задачами, как исследование пространств монополей, Заставы Дринфельда и вообще геометрией пространства флагов.

В части проекта, связанной с задачей решения квантовых интегрируемых систем, также были получены новые результаты, а именно было построено дискретное семейство симметрий на множестве собственных векторов квантовой модели [3]. Последнее семейство интересно своим происхождением из теории изомонодромных деформаций и в определенном смысле является аналогом арифметических преобразований Гекке. По материалам проекта в 2010 году мной была защищена докторская диссертация „Квантовый метод спектральной кривой“ в диссертационном совете Д 002.022.03 при Математическом институте В.А. Стеклова.

### 3 Результаты 2010 года

Остановлюсь подробнее на результатах 2010 года. Одним из них является расширение области применения квантового метода спектральной кривой для так называемой

полной системы Тоды. Классическая интегрируемая система строится на пространстве симметричных матриц  $n \times n$  с помощью так называемой процедуры вычеркивания: введем частичные матрицы  $A_k(\lambda)$  получаемые удалением правых  $k$  столбцов и верхних  $k$  строк матрицы  $A - \lambda Id$ . Известно, что коэффициенты выражения  $P_k(\lambda) = \Delta_k(\lambda)/\Delta_{n-k}(\lambda)$  где

$$\Delta_k(\lambda) = \det A_k(\lambda) = \sum_i I_{k,i} \lambda^i \quad (1)$$

порождают Пуассон-коммутативную подалгебру в кольце рациональных функций на  $\mathfrak{b}^*$ .

Квантование данной системы было построено благодаря нахождению производящей функции классических интегралов. Для этого рассмотрим матрицу  $A$  коэффициенты которой являются генераторами  $\mathfrak{sl}_n$

$$A = \sum_{ij} E_{ij} \otimes e_{ij}.$$

Введем также обозначения

$$\Xi_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{n-2} & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тогда интересующие нас функции могут быть интегрированы в производящую функцию

$$\begin{aligned} P(z, \lambda, \varepsilon) &= \text{Det} (Az^{-1} + \Xi_\varepsilon - \lambda Id) \\ &= \sum_k I_k(z, \lambda, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^{k(k-1)/2} (I_k^0(z, \lambda) + O(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (3)$$

где  $I_k(z, \lambda, \varepsilon)$  однородны по  $z^{-1}$ ,  $\lambda$  степени  $n - k$ . В частности

$$\Delta_k(\lambda) = I_k^0(1, \lambda). \quad (4)$$

Был реализован формализм редукции АКС для разложения  $\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{so}_n$ . В частности было доказано, что интегралы инвариантны относительно Борелевской подгруппы.

Квантование было построено с помощью квантования системы до редукции АКС, а именно с помощью выражения

$$\begin{aligned} PQ(z, \lambda, \varepsilon) &= \text{Det} (Az^{-1} + \Xi_\varepsilon - \partial_z Id) \\ &= \sum_k QI_k(z, \partial_z, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^{k(k-1)/2} (QI_k^0(z, \partial_z) + O(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (5)$$

в котором генераторы алгебры Ли играют роль квантовых операторов, а определитель берется в полностью симметризованной форме. В квантовом случае также была реализована редукция АКС: была построена подходящая локализация  $U(\mathfrak{b})$  по подмножеству, порожденному элементами  $\{QI_{k,n-k}\}$ , которое в свою очередь является подмножеством Оре, доказана коммутативность выражений  $(QI_{k,i})_+ / QI_{k,n-k}$  в которых индекс  $+$  определяет элемент из  $U(\mathfrak{b})$  в соответствии с разложением:

$$U(\mathfrak{sl}_n) = \mathfrak{so}_n U(\mathfrak{sl}_n) \oplus U(\mathfrak{b}). \quad (6)$$

Оператор Лакса данной модели, а также непосредственных многоточечных обобщений, индуцирует отображение в пространство флагов. Учитывая, что семейство построенных интегралов инвариантно относительно действия Борелевской подгруппы, обобщенная система Toda определяет коммутирующие потоки и на пространстве отображений в пространство флагов.

## 4 Публикации и участие в конференциях

Публикации 2010:

[5], [6].

Конференции 2010 год:

- Конференция стипендиатов конкурса Делиня и фонда Династия, доклад "Квантовый метод спектральной кривой".
- Representation Theory & Quantization, дата и место проведения: January 25-29, 2010, FIM, ETH Zurich.

## Список литературы

- [1] Д. Талалаев, *Квантовая система Годена*, Функциональный Анализ и его приложения 40 No. 1 pp.86-91 (2006)
- [2] A.Chervov, D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, hep-th/0604128
- [3] Д. Талалаев, *Анзац Бете и изомонодромные преобразования*, Теоретическая и математическая физика, ТМФ, 2009, том 159, номер 2, стр. 252-265
- [4] V. Rubtsov, A. Silantiev, D. Talalaev, Manin Matrices, Quantum Elliptic Commutative Families and Characteristic Polynomial of Elliptic Gaudin model, arXiv:0908.4064 Принято к публикации в журнал SIGMA
- [5] Д.В. Талалаев *Квантовый метод спектральной кривой*, диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2010г. МИАН В.А. Стеклова.
- [6] D. Talalaev *Quantum generic Toda chain*. preprint ITEP-TH-54/10