

**ОТЧЕТ**  
**СТИПЕНДИАТА ФОНДА «ДИНАСТИЯ»**  
**Т.М. САДЫКОВА ЗА 2010 ГОД**

**1. Научные результаты.**

Класс систем дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа можно считать простейшим классом систем уравнений с непостоянными полиномиальными коэффициентами. Такие системы дифференциальных уравнений в частных производных образуют важный класс регулярных голономных левых идеалов в алгебре Вейля линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. К ним относятся система Гельфанда-Капранова-Зелевинского, уравнения Книжника-Замолдчикова, система дифференциальных уравнений Горна, классическая система Меллина для решения общего алгебраического уравнения и ее современная версия для произвольной системы алгебраических уравнений с произвольным числом неизвестных функций.

Многомерная гипергеометрическая теория привлекательна разнообразием используемых в ней понятий и методов. В разной степени в ней присутствуют многомерный комплексный анализ (решения гипергеометрических систем ищутся, как правило, в виде ростков многозначных аналитических функций, допускают представление в виде интегралов Меллина-Барнса и кратных рядов), топология (для нахождения решений нужно вычислять группы гомологий; естественным образом возникает понятие разделяющего цикла), алгебра (в виде спектра методов вычисления размерности линейного пространства решений системы уравнений в окрестности неособой точки, то есть, голономного ранга системы) и алгебраическая геометрия.

Монодромия многозначной аналитической функции характеризует ветвление этой функции на множестве ее особенностей. Понятие монодромии является центральным в нескольких классических проблемах (включая 21-ю проблему Гильберта) и играет важную роль во многих недоказанных гипотезах.

В 2010 году автором отчета был получен существенный прогресс в вычислении представления монодромии заданной системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа. Основные результаты состоят в следующем:

- получено необходимое и достаточное условие голономности произвольной атомарной системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа и вычислен ее голономный ранг;
- доказано существование и получена формула для так называемого порождающего решения произвольной атомарной системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа (то есть, такого ее решения, что любое решение той же системы уравнений, не получаемое из порождающего при помощи аналитического продолжения, является многочленом Пюизо);
- вычислены начальные показатели всех решений голономной атомарной системы гипергеометрического типа;
- предложена процедура редукции задачи вычисления представления монодромии произвольной гипергеометрической системы к задаче изучения конечного набора атомарных систем;
- для каждой связной компоненты дополнения амобы особенности общего решения заданной гипергеометрической системы построен базис в пространстве ее решений (голоморфных в окрестности заданной неособой точки) в виде т.н. чистых рядов Пюизо;
- для построенных базисов найдены их области голоморфности и вычислены матрицы связи.

За отчетный 2010 год в рамках настоящего проекта исследований решена также вспомогательная задача построения и детального описания свойств однозначно определенного линейного дифференциального оператора с полиномиальными коэффициентами, чье

пространство голоморфных решений (в окрестности неособой точки общего положения) порождается ветвями заданной алгебраической функции, удовлетворяющей алгебраическому уравнению с коэффициентами общего положения. Введено понятие многогранника Ньютона оптимального зануляющего оператора для алгебраической функции как выпуклой оболочки показателей мономов, входящих в его полиномиальные коэффициенты. Показано, что данный многогранник Ньютона имеет специфическую «слоистую» структуру: его вершины лежат на конечном наборе параллельных плоскостей, уравнения которых вычисляются на основе данных, определяющих исходную алгебраическую кривую.

Методы теории многомерных вычетов позволяют построить эффективные алгоритмы вычисления дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами для алгебраических функций многих комплексных переменных. Высокая вычислительная сложность данной задачи в совокупности с компактностью результата вычислений могут быть использованы в качестве теоретической основы криптографических методов. К данной тематике проявляет интерес американская компьютерная фирма Wolfram Research Inc. (Иллинойс, США), предложившая автору отчета принять участие в разработке пакета в системе компьютерной алгебры Mathematica для поддержки информационных ресурсов компании.

При этом в соответствии с общей теорией  $A$ -дискриминантов многогранник Ньютона каждого из коэффициентов оптимального зануляющего оператора для алгебраической функции лежит в некоторой гиперплоскости, то есть, является множеством нулевой меры в пространстве всех параметров исходной алгебраической кривой. Получено необходимое и достаточное условие приводимости монодромии общей гипергеометрической системы уравнений, ассоциированной с произвольной симплицальной конфигурацией.

**2. Опубликованные и поданные в печать работы.** За отчетный период подготовлены следующие работы:

- V.A. Krasikov, T.M. Sadykov, *Linear differential operators for generic algebraic curves*, arXiv:1001.2607v1, 16 стр.

- Т.М. Sadykov, *Monodromy of hypergeometric systems*, в печати, 38 стр.
- Опубликованы тезисы докладов в университетах городов Токио и Кобе, тезисы лекции, прочитанной в университете г. Кумамото, и тезисы доклада в Стокгольмском университете (см. ниже).

### **3. Участие в конференциях и школах.**

- Доклад на совместном семинаре университета г. Токио и Физико-математического института (IPMU Komaba seminar) 1 февраля 2010 г., Токио, Япония
- Доклад на семинаре по многомерной гипергеометрической теории, университет г. Кобе 3 февраля 2010 г., Кобе, Япония
- Доклад на семинаре математического факультета университета г. Кумамото в рамках школы «Избранные задачи теории особенностей», 2-8 марта 2010 г., Кумамото, Япония
- Доклад на семинаре «Многомерный комплексный анализ», 23 ноября 2010 г., Стокгольмский университет, Швеция

### **4. Работа в научных центрах и международных группах.**

С января по март 2010 года (всего несколько менее двух месяцев) я работал в составе исследовательской группы под руководством профессора С. Танабе на математическом факультете университета г. Кумамото (Япония). В рамках этой поездки были организованы выступления с докладами в нескольких университетах Японии, в том числе в университете г. Кобе, где я принял участие в работе научного семинара центра гипергеометрических исследований (по приглашению профессора М. Noumi).

В ноябре 2010 года я посетил Стокгольмский университет (Швеция), где выступил с докладом на научном семинаре и принял участие в работе над полиномиальными собственными функциями обобщенных операторов Хойна и феноменом скачкообразного изменения голономного ранга системы Гельфанда-Капранова-Зелевинского при возмущении ее параметров (совместно с Б. Шапиро и С. Berkesh).

## **5. Педагогическая деятельность.**

На протяжении осеннего семестра 2010 г. я преподавал на факультете информационных технологий Российского государственного торгово-экономического университета следующие дисциплины: методы оптимизации (лекции), теория управления (лекции), высокоуровневые методы информатики и программирования (лекции и лабораторный практикум), компьютерное моделирование (лекции).

С 11 по 13 ноября 2010 года я принял участие в организации работы 32-й Московской международной выставки «Образование и карьера – XXI век».

Помимо этого, я руковожу выполнением двух дипломных работ и двух кандидатских диссертаций.

В марте 2010 г. мною был получен аттестат доцента по кафедре теории функций.

## **6. Итог работы за три года и сравнение заявки с достигнутыми результатами.**

В качестве основной цели поддержанного фондом «Династия» проекта исследований было заявлено вычисление группы монодромии общей гипергеометрической системы дифференциальных уравнений в частных производных. В заявке были сформулированы, в числе прочих, гипотезы об общем виде решения гипергеометрической системы общего положения, о связи носителей решений (равно как и их начальных показателей) гипергеометрической системы общего положения и носителей решений ассоциированных с ней атомарных систем, а также представлениях монодромии некоторых отдельных классов гипергеометрических систем (в частности, ассоциированных с симплициальными конфигурациями и зонотопами).

В рамках работы над настоящим проектом исследований все перечисленные выше гипотезы были доказаны (некоторые из них – в уточненном виде), доказательства были опубликованы. Они частично вошли в текст докторской диссертации, защищенной мной в 2009 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

Основная цель проекта – вычисление группы монодромии общей гипергеометрической системы дифференциальных уравнений – до-

стигнута в широком классе случаев, для которых фундаментальная группа дополнения к проекции характеристического многообразия системы на пространство переменных заведомо порождается «удобными» петлями, вдоль которых оказывается возможным осуществлять аналитическое продолжение базисных рядов Пуанкаре. На данный момент мне неизвестны примеры гипергеометрических идеалов, для которых это условие не выполняется, и многое говорит в пользу того, что их нет. Доказательство этой гипотезы будет означать возможность явного задания порождающих группы монодромии произвольной гипергеометрической системы.